Propriedades de Transformação Linear

Uma transformação linear é totalmente determinada pelos valores assumidos numa base:

Exemplo. Descreva a única transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0) = (1,2,3), \quad T(0,1) = (0,1,-1).$$

Então, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$T(x,y) = T((x,0)+(0,y)) = T(x,0) + T(0,y)$$

$$= x \cdot T(1,0) + y \cdot T(0,1) = x(1,2,3) + y(0,1,-1)$$
$$= (x, 2x, 3x) + (0, y, -y) = (x, 2x+y, 3x-y).$$

$\{(1,0), (0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$

Teorema. Sejam V e W esp. vet., $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V, e $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ quaisquer. Então existe uma única transf. linear $T: V \to W$ tal que

$$T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = w_2, \ldots, \quad T(v_n) = w_n.$$

Exemplo. Qual a transf. linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,0,-2)$?

Vamos escrever um elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ como comb. linear de $\{(1,1), (0,1)\}$. Temos que (verifique):

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1).$$

Assim,

$$T(x,y) = T(x(1,1) + (y-x)(0,1)) = x\,T(1,1) + (y-x)\,T(0,1)$$
$$= x(3,2,1) + (y-x)(1,0,-2) = (3x, 2x, x) + (y-x, 0, -2y+2x)$$

$$T(x,y) = (y+2x, 2x, -2y+3x).$$

$\operatorname{Ker} T \subseteq V \xrightarrow{T} W \supseteq \operatorname{Im} T$

Definição. Seja $T: V \to W$ linear. A imagem de T é
$$\operatorname{Im} T = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ com } T(v) = w\}$$
(equivalentemente $\operatorname{Im} T = \{T(v) \mid v \in V\}$). Denota-se também a imagem por $T(V)$.

O núcleo, denotado por $N(T)$ ou $\operatorname{Ker} T$, é
$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Teorema. $\operatorname{Im} T \subseteq W$ e $\operatorname{Ker} T \subseteq V$ são subesp. vet.

Dem.: exercício.

Exemplos.

1. Considere a aplicação nula, $T: V \to W$ t.q.
$$T(v) = 0, \ \forall v \in V.$$
$\operatorname{Im} T = \{0\}$, $\operatorname{Ker} T = V$. De fato,
$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = 0\} = V.$$

2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y) = x - 2y$.
Temos que $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$. Duas formas de ver:

(a) Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que $a = T(a,0) \in \operatorname{Im} T$. Daí
$$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}.$$

(b) $\operatorname{Im} T = \{T(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x - 2y \mid x, y \in \mathbb{R}\} \supseteq$
$\supseteq \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Daí $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$.

Vamos calcular $\operatorname{Ker} T$:
$$\operatorname{Ker} T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 = T(x,y) = x - 2y\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$$
$$= \{(2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = [(2,1)].$$

Teorema do Núcleo e Imagem. Seja $T: V \to W$ linear. Então
$$\dim V = \dim(\operatorname{Im}(T)) + \dim(\operatorname{Ker}(T)).$$

Definição. Seja $T: V \to W$ uma função.
(i) T é injetora se $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. $(u, v \in V)$
(ii) T é sobrejetora se $\forall w \in W, \exists v \in V$ tal que $T(v) = w$.
(iii) T é bijetora se é injetora e sobrejetora.
(iv) Se T é linear e bijetora, então diz-se que T é um isomorfismo. Neste caso, V e W são ditos ser isomorfos.

Dois espaços isomorfos são iguais do ponto de vista da Álgebra Linear.

Exemplo. $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^4$ são isomorfos.

Teorema. Seja $T: V \to W$ linear. Então:
(i) T é sobrejetora se e só se $\operatorname{Im} T = W$,
(ii) T é injetora se e só se $\operatorname{Ker} T = \{0\}$

Teorema. Assuma que $\dim V = \dim W$. Então T é injetora se e só se T é sobrejetora.

Demonstração. Segue do Teo. do Núcleo e Imagem.

Vamos estudar a matriz de uma transf. linear. Sejam $T: V \to W$ linear, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ base de W. Então, existem coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m.$$

A matriz de T em relação às bases β e β' é

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Note que dado $v \in V$,

$$[T(v)]_{\beta'} = [T]^{\beta}_{\beta'} [v]_{\beta}.$$

Exemplos.

3. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+7z)$, e considere as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, ou seja,
$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}, \quad \beta' = \{(1,0), (0,1)\}.$$
Então
$$T(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$
$$T(0,1,0) = (1,-2) = 1\cdot(1,0) + (-2)(0,1)$$
$$T(0,0,1) = (-1,7) = -1\cdot(1,0) + 7(0,1).$$
Então,
$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Sejam $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T(x,y) = (2x-y, 3y).$$
Vamos calcular $[T]^{\beta}_{\beta}$:
$$T(1,1) = (2-1,3) = (1,3) = 1\cdot(1,1) + 2(0,1)$$
$$T(0,1) = (-1,3) = -1(1,1) + 4(0,1)$$
Então
$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
$$[(-1,3)]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Sejam β e β' bases de V e $I: V \to V$ a aplicação identidade, isto é, $I(v) = v$, $\forall v \in V$. Então a matriz de I em relação às bases β e β', $[I]^{\beta}_{\beta'}$, coincide com a matriz mudança de base de β para β'.

Exemplo. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x,y,z) = (x+2y+7z,\ y-3z,\ z).$$
Vamos mostrar que T é um isomorfismo.

Da teoria, como $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, basta mostrar que T é injetora. Então
$$\operatorname{Ker} T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (0,0,0) = T(x,y,z) = (x+2y+7z,\ y-3z,\ z)\}$$
Obtemos então
$$\begin{cases} x+2y+7z = 0 \\ \quad\ \ y-3z = 0 \\ \qquad\quad\ z = 0 \end{cases}$$
cuja única solução é $(0,0,0)$ (verifique). Daí
$$\operatorname{Ker} T = \{(0,0,0)\}.$$
Portanto, T é injetora. Do comentário inicial, segue que T é um isomorfismo.