Transformação Linear

Definição. Sejam V e W esp. vet. Uma função $T: V \to W$ é dito ser uma transformação linear se satisfaz:

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in V,$

(ii) $T(\lambda v) = \lambda T(v), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V.$

Exemplos.

1. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, e defina $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via
$$T(x) = \alpha x.$$
Vamos provar que T é uma transformação linear.

(i) $T(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = T(x) + T(y).$

(ii) $T(\lambda x) = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x = \lambda T(x)$

2. Qualquer transf. linear $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo do Exemplo 1. De fato, seja $\alpha = T(1)$. Então
$$T(x) = T(x \cdot 1) \underset{(ii)}{=} x\, T(1) = x\alpha = \alpha x$$

3. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ não é linear. De fato, se fosse linear, valeria que
$$f(1+1) = f(1) + f(1).$$
Mas, $f(1+1) = f(2) = 2^2 = 4,$
$$f(1) + f(1) = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 4.$$

4. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x,y) = (2y, 0, x-y).$$
Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

(i) $T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2(y_1+y_2), 0, x_1+x_2-(y_1+y_2))$

$T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2) = (2y_1, 0, x_1-y_1) + (2y_2, 0, x_2-y_2) =$
$= (2y_1+2y_2, 0, x_1+x_2-y_1-y_2)$

(ii) $T(\lambda(x_1,y_1)) = T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (2\lambda y_1, 0, \lambda x_1 - \lambda y_1)$

$\lambda T(x_1,y_1) = \lambda(2y_1, 0, x_1-y_1) = (\lambda 2y_1, 0, \lambda(x_1-y_1))$

5. Seja $P_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios de grau no máximo n com coef. reais. Seja $D: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ dada pela derivada, $D(f) = f'$. Então D é linear. De fato, sabe-se que

(i) $(f+g)' = f'+g'$
(ii) $(\lambda f)' = \lambda f'$.

6. Sejam V e W esp. vetoriais. Então, $T: V \to W$ dada por $T(v) = 0$, $\forall v \in V$ é uma transformação linear (exercício: verifique).

7. Sejam $V = M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, e $W = M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes coluna de tamanho 2 e 3. Defina

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Então, $T: M_{2\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ definida por $T(X) = MX$ é uma transformação linear. De fato, sabe-se que valem:

(i) $M(X_1+X_2) = MX_1 + MX_2$
(ii) $M(\lambda X) = \lambda MX$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Vamos calcular diretamente o que é $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Temos

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot x + 2y \\ 0\cdot x + 0\cdot y \\ x + (-1)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ x - y \end{pmatrix}$$

Perceba que T é similar ao Exemplo 4.

8. Mais geralmente, seja M uma matriz $m \times n$. Então $T: M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = MX$ é uma transformação linear (exercício: verifique).

Observação. Se $T: V \to W$ é linear, então $T(0) = 0$. Tal fato pode ser usado para concluir que uma função não é linear. Porém, $T(0) = 0$ não é suficiente para concluir que T é linear.

Os próximos exemplos são transformações do plano no plano.

9. (contração ou expansão)
Sejam $\alpha > 0$ e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = \alpha v$. A imagem $T(v)$ possui mesma direção e sentido de v, porém norma diferente.
Observe que podemos representar

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

10. (reflexão em torno do eixo x)
Defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via $T(x,y) = (x,-y)$. Podemos escrever

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

11. (reflexão em torno da origem)
Defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (-x,-y)$.
Pode-se escrever

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

12. (rotação de um ângulo). A rotação de um vetor (x,y) por um ângulo θ no sentido anti-horário é descrita pela multiplicação matricial

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

T é uma transformação linear.

13. (translação) Seja $w=(a,b)$, e defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$T(x,y) = (x+a, y+b).$$

A função T **não** é linear, exceto se $a=b=0$.

Se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então T não é linear, pois

$$T(0,0) = (a,b) \neq (0,0).$$

$T((1,0)+(0,1))$