4.1 Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

(a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,3,5)\}$
(b) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$
(c) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,1,-2)\}$
(d) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

(a) Tal conjunto é l.d., pois

$$2\cdot(1,0,0)+3\cdot(0,1,0)+5\cdot(0,0,1)-1\cdot(2,3,5)=(0,0,0).$$

Argumento alternativo:

Vimos o seguinte resultado:

Teorema. Se $\dim V = n$, então um conjunto com mais de n elementos de V é l.d.

Como o conjunto possui 4 elementos, e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, segue do teorema acima que o conjunto é l.d.

Outra forma: O elemento $(2,3,5)$ é comb. linear dos demais, pois

$$(2,3,5) = 2\cdot(1,0,0)+3\cdot(0,1,0)+5\cdot(0,0,1),$$

e daí, o conjunto é l.d.

(b) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$ é l.i, pois sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$ tais que

$$(0,0,0) = a(1,1,1)+b(1,0,1)+c(1,0,-2) =$$
$$=(a+b+c,\ a,\ a+b-2c).$$

Daí, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a = 0 \\ a+b-2c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ b-2c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Portanto, $a=b=c=0$, e o conjunto é l.i.

(C) $\{(0,0,0), (1,2,3), (4,1,-2)\}$ é l.d. De fato:

$$(0,0,0) = 1\cdot(0,0,0) + 0\cdot(1,2,3) + 0\cdot(4,1,-2)$$

Obs.: Um conjunto contendo o vetor nulo sempre é l.d.

4.3 Achar uma base e a dimensão do seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, x + 2y + w = 0\}$.

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ x+2y+w=0\} =$$

$$= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y,\ w = -x-2y\} =$$

$$= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y,\ w = -3y\}$$

$$= \{(y,y,z,-3y) \mid z, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(y,y,0,-3y) + (0,0,z,0) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(1,1,0,-3) + z(0,0,1,0) \mid y,z \in \mathbb{R}\} = [(1,1,0,-3), (0,0,1,0)].$$

Vamos provar que $\beta = \{(1,1,0,-3), (0,0,1,0)\}$ é base de W.
Para isso, falta mostrar que β é l.i. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,0,0,0) = a(1,1,0,-3) + b(0,0,1,0) = (a,a,b,-3a),$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ -3a = 0 \end{cases}$$

Então $a = b = 0$. Daí β é l.i., e portanto, uma base de W.
Assim, $\dim W = 2$.

4.4 No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:

$$U = \{(x,y,z) \mid x = 0\}, \quad V = \{(x,y,z) \mid y - 2z = 0\}, \quad W = [(1,1,0),(0,0,2)].$$

Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: U, V, W, $U \cap V$, e $U + V$.

Base de U:

Temos que

$$U = \{(x,y,z) \mid x = 0\} = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,0) + z(0,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= [(0,1,0),(0,0,1)].$$

O conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é l.i. (exercício), e portanto, é uma base de U. Segue que $\dim U = 2$.

Base de V:

Temos que

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\} = \{(x,2z,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(x,0,0) + (0,2z,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + z(0,2,1) \mid x,z \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto $\{(1,0,0),(0,2,1)\}$ é l.i. De fato, sejam $a,b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,0,0) = a(1,0,0) + b(0,2,1) = (a,2b,b).$$

Assim, $a = 0$ e $b = 0$. Daí $\{(1,0,0),(0,2,1)\}$ é base de V e $\dim V = 2$.

Base de $U \cap V$:

Temos que

$$U \cap V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0,\ x = 0\} = \{(0,2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z(0,2,1) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(0,2,1)]$$

Assim, $\{(0,2,1)\}$ é base de $U \cap V$ e $\dim U \cap V = 1$.

Base de $U+V$: Vimos o seguinte:

$$\boxed{\textbf{Teorema.}\ \dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)}$$

Do teorema, segue que $\dim(U+V) = 2 + 2 - 1 = 3$ $(= \dim \mathbb{R}^3)$. Daí $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $U+V$.

Relembre: $U+V=\{u+v,\ u\in U,\ v\in V\}$.

5.5 Considere as bases $\beta=\{v_1,v_2,v_3\}$ e $\beta'=\{v_1',v_2',v_3'\}$ assim relacionadas:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - v_2 - v_3,\\ v_2' &= \quad\ \ 2v_2 + 3v_3,\\ v_3' &= 3v_1 \qquad + v_3. \end{aligned}$$

(a) Determinar as matrizes de mudança de β para β', e de β' para β.

(b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta as coordenadas 1, 2 e 3, em relação a base β, quais as coordenadas de u relativamente a β'?

(a) Temos que $[v_1']_\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $[v_2']_\beta=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$, $[v_3']_\beta=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Assim, a matriz mudança de base de β' para β é

$$[I]^{\beta'}_{\beta}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}.$$

Ainda,

$$[I]^{\beta}_{\beta'}=\left([I]^{\beta'}_{\beta}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-9&6\\-1&-4&3\\1&3&-2\end{pmatrix}$$

(b) $[u]_\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $[u]_{\beta'}=\ ?$

$$[u]_{\beta'}=[I]^{\beta}_{\beta'}[u]_\beta=\begin{pmatrix}-2&-9&6\\-1&-4&3\\1&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-18+18\\-1-8+9\\1+6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

5.6 Considere o seguinte subespaço vetorial do espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem 2: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid x - y - z = 0 \right\}$.

(a) Mostrar que os seguintes subconjuntos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ são bases de U:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \beta' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Achar a matriz de mudança de base de β para β', e de β' para β.

(c) Achar uma base β'' de U, de tal maneira que a matriz de mudança de base de β'' para β seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vamos mostrar que β é l.i. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Obtemos:

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ou seja, $a = b = c = 0$, e β é l.i. Mostremos que β gera U:

$$\left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mid y, z, w \in \mathbb{R} \text{ e } x = y + z \right\} = U.$$

Daí, β é base de U.

Argumento alternativo: Primeiro, mostramos que β é l.i. Então, como $\beta \subseteq U$. O subespaço gerado por β possui dimensão 3. Além disso $U \neq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, daí $3 \leq \dim U < 4$. Portanto $\dim U = 3$, e daí β é base de U.

Dado que $\dim U = 3$, basta mostrar que β' é l.i. Isso já irá concluir que β' é base de U. (conclusão fica de ex.).

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ a+b & c \end{pmatrix}$

Daí

$$\begin{cases} a = 1 \\ -b = 1 \\ a+b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \sim \quad a=1,\ b=-1,\ c=0.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daí

$$[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular $[I]^{\beta'}_{\beta}$ fica de exercício.

(c) (parecido com ex. 54).