

3.1 Sejam U , V e W os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \mid x = z\},$$

$$V = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3$, e $U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em alguns dos casos a soma é direta?

$$U = \{(x, y, z) \mid x = z\} = \{(x, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$$U + V = \{(x, y, x) + (0, 0, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

$$= \{(x, y, x + z) \mid x, y \in \mathbb{R}, z = -x + z', z' \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, y, x - x + z') \mid x, y, z' \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z') \mid x, y, z' \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

$$U + V = \{(x, y, x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \supseteq \{(x, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^3$$

$$U + V = \{(x, y, x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \supseteq \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^3$$

Outra forma de concluir que $U + V = \mathbb{R}^3$:

$$U + V = \text{(repetindo contas)} = \{(x, y, x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Provemos que qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ está em $U + V$:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ x + y + z = c \end{cases} \sim \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c - a \end{cases}$$

Portanto, $(a, b, c) = (a, b, a + (c-a)) \in U+V$.
Assim, $U+V = \mathbb{R}^3$.

Exemplo em que $Z+V \neq \mathbb{R}^3$.

Defina $Z = \{(x, y, z) \mid x-y=0, z=0\} =$
 $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y, z=0\} = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Temos que

$$Z+V = \{(x, x, 0) + (0, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Provenmos que $Z+V \neq \mathbb{R}^3$.

Arg1: Dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, vamos tentar mostrar que $(a, b, c) \in Z+V$.
Assim, temos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ z = c \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} z = c \\ x = a \\ 0 = b-a \end{array} \right.$$

O sistema tem solução se e só se $a=b$. Portanto $Z+V \neq \mathbb{R}^3$.

Arg2. Note que $(0, 1, 0) \notin Z+V$. Daí $Z+V \neq \mathbb{R}^3$.

Voltando ao exercício. A soma $U+V = \mathbb{R}^3$ é direta?

Vamos olhar a interseção:

$$U \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=z, x=y=0\} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Portanto, $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soma é direta se $U \cap V = \{0\}$.

Ex. extra:

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} + \{(-x, -y, -z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x_1, y_1, z_1) + (-x_2, -y_2, -z_2) \mid x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \mid x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

3.2 Exiba um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

(a) $U = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}$

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\} = \{(2y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2y, y, 0) + (0, 0, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Daí, um conjunto de geradores de U é $B = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

$$\langle (2, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \neq \langle (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \{y_1(2, 0, 0) + y_2(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\}$$

Esse B é base de U ?

Basta mostrar que B é l.i.:

assuma que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que

$$(0, 0, 0) = 0 = a(2, 1, 0) + b(0, 0, 1) = (2a, a, b)$$

Assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \sim a = b = 0.$$

Daí B é l.i. Ou seja, B é base de U . Portanto $\dim U = 2$.

5.1. Determine as coordenadas de $u = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ na base:

(a) $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,

$$u = (4, -5, 3) = 4(1, 0, 0) - 5(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

$$[u]_{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$.

queremos encontrar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} (4, -5, 3) &= a(1, 1, 1) + b(1, 2, 0) + c(3, 1, 0) = (a, a, a) + (b, 2b, 0) + (3c, c, 0) \\ &= (a+b+3c, a+2b+c, a). \end{aligned}$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + 3c = 4 \\ a + 2b + c = -5 \\ a = 3 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a = 3 \\ b + 3c = 1 \\ 2b + c = -8 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 3 \\ b + 3c = 1 \\ -5c = -10 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases}$$

$L_3' = L_3 - 2L_2$

Daí $[(4, -5, 3)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

5.2 Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$, e $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Ache as matrizes de mudança de base:

i) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ iii) $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ iv) $[I]_{\beta_3}^{\beta}$

(b) Quais as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base:

i) β ii) β_1 iii) β_2 iv) β_3 .

(c) As coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por $[v]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Quais são as coordenadas de v em relação à base:

i) β ii) β_2 iii) β_3 .

$$(a) \quad i) \quad [(-1, 1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [(1, 1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$[I]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Para calcular $[I]_{\beta_1}^{\beta}$, vamos escrever os elementos de β na base β_1 .

$$\text{Vamos calcular } [(1, 0)]_{\beta_1}: \quad (1, 0) = a(-1, 1) + b(1, 1) = (-a+b, a+b)$$

$$\therefore \begin{cases} -a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \sim \begin{cases} -a+b=1 \\ 2b=1 \end{cases} \sim \begin{cases} a=-1/2 \\ b=1/2 \end{cases}$$

$$\text{Daí } [(1, 0)]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calculando } [(0, 1)]_{\beta_1}: \quad (0, 1) = a(-1, 1) + b(1, 1)$$

$$\begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \sim \begin{cases} -a+b=0 \\ 2b=1 \end{cases} \sim \begin{cases} a=1/2 \\ b=1/2 \end{cases}$$

$$\text{Daí } [(0, 1)]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad [I]_{\beta_1}^{\beta} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$v = (3, -2)$$

$$(3, -2) = a(-1, 1) + b(1, 1)$$

$$(b) \quad i) [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$ii) [v]_{\beta_1} = [I]_{\beta_1}^{\beta} [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

5.4 A matriz de mudança de uma base β de $\mathbb{R}^2$ para a base $\{(1, 1), (0, 2)\}$ desse mesmo espaço

é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinar a base β .

$$\beta' = \{(1, 1), (0, 2)\}, \quad [I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Se } \beta = \{v_1, v_2\}.$$

$$[v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [v_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \left(\begin{array}{l} \text{pois } v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \\ v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \end{array} \right)$$

$$\text{Daí } [v_1]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Daí } v_1 = 1 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (0, 2) = (1, 5)$$

Da mesma forma, conseguimos exibir v_2 (conclua).