Relembre...

**Teorema.** Duas bases de um mesmo espaço $V$ possuem o mesmo número de elementos.

Definimos $\dim V$ como sendo o número de elementos de uma base.

Exemplos.
(i) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, (ii) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, (iii) $\dim \mathbb{R}^n = n$
(iv) $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

**Teorema.** Assuma que $\dim V = n$. Então:
(i) qualquer conjunto com mais de $n$ vetores de $V$ é l.d.,
(ii) se um conjunto l.i. de $V$ possui exatamente $n$ elementos, então o mesmo é uma base de $V$.

**Teorema.** Seja $V$ um esp. vet. e $W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços. Então

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 .$$

**Exemplo.** Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = W_2 = \mathbb{R}^2$. Então

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2.$$
$$\left(\text{pois } (a,b) + (0,0) = (a,b)\right).$$

Então

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim \mathbb{R}^2 = 2,$$
$$\dim W_1 = \dim W_2 = 2,$$
$$\dim (W_1 \cap W_2) = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

Daí $\underbrace{\dim (W_1 + W_2)}_{2} = \underbrace{\dim W_1}_{2} + \underbrace{\dim W_2}_{2} - \underbrace{\dim (W_1 \cap W_2)}_{2}$

$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é l.i.

# Coordenadas e Mudança de Base

**Teorema.** Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de $V$. Então, para cada $v \in V$, existem **únicos** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

**Definição.** Fixada uma base (ordenada) $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que
$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$
são denominados as coordenadas de $v$ na base $\beta$. Denotamos por
$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

**Exemplos.** 1. Seja $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Então, cada $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se escreve como
$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$
Então
$$[(a,b,c)]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
Daí, por exemplo, $[(1,2,7)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Seja agora $\beta' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, que já vimos ser l.i.. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, segue que $\beta'$ é base de $\mathbb{R}^3$.
Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, então
$$(a,b,c) = c(1,1,1) + (b-c)(1,1,0) + (a-b)(1,0,0)$$
Daí
$$[(a,b,c)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix}.$$
Por exemplo,
$$[(1,2,7)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [(1,0,0)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [(0,1,0)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Seja $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \text{ então, por exemplo, } \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3. Seja $W = \{(x,y,z,0) \in \mathbb{R}^4\}$. Então $\beta = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é base de $W$ (verifique).

$$[(a,b,c,0)]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Dadas duas bases $\beta$ e $\beta'$, como se relacionam as coordenadas de um elemento $v$ em relação a cada uma das bases?

Escreva $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \underbrace{\{v_1', v_2', \dots, v_n'\}}$, e $v \in V$ tem a representação

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad [v]_{\beta'} = ?$$

Isso significa que

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n.$$

Escreva, para cada $i = 1, 2, \dots, n$,

$$v_i = \alpha_{1i} v_1' + \alpha_{2i} v_2' + \dots + \alpha_{ni} v_n'.$$

Então

$$\begin{aligned} v &= x_1(\alpha_{11} v_1' + \alpha_{21} v_2' + \dots + \alpha_{n1} v_n') + x_2(\alpha_{12} v_1' + \dots + \alpha_{n2} v_n') \\ &\quad + \dots + x_n(\alpha_{1n} v_1' + \dots + \alpha_{nn} v_n') \\ &= (x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \dots + x_n\alpha_{1n}) v_1' + (x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22} + \dots + x_n\alpha_{2n}) v_2' \\ &\quad + \dots + (x_1\alpha_{n1} + \dots + x_n\alpha_{nn}) v_n'. \end{aligned}$$

Daí

$$[v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} x_1\alpha_{11} + \dots + x_n\alpha_{1n} \\ \vdots \\ x_1\alpha_{n1} + \dots + x_n\alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Denotamos

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é denominada matriz mudança de base de $\beta$ para $\beta'$. A mesma satisfaz

$$[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [v]_{\beta}.$$

Exemplo. No espaço $\mathbb{R}^2$, vamos encontrar a matriz mudança de base de $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ para $\beta' = \{(1,1), (1,0)\}$. Para isso, basta determinar

$$[(1,0)]_{\beta'} \quad e \quad [(0,1)]_{\beta'}.$$

Queremos encontrar $\alpha_{11}, \alpha_{21} \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,0) = \alpha_{11}(1,1) + \alpha_{21}(1,0) = (\alpha_{11} + \alpha_{21}, \alpha_{11})$$

Daí

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} = 1 \\ \alpha_{11} = 0 \end{cases}$$

Obtemos que $\alpha_{11} = 0$ e $\alpha_{21} = 1$. Assim

$$[(1,0)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Queremos $\alpha_{12}, \alpha_{22} \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,1) = \alpha_{12}(1,1) + \alpha_{22}(1,0) = (\alpha_{12} + \alpha_{22}, \alpha_{12})$$

Daí

$$\begin{cases} \alpha_{12} + \alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{12} = 1 \end{cases}$$

Obtemos $\alpha_{12} = 1$ e $\alpha_{22} = -1$. Então

$$[(0,1)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto a matriz mudança de base de $\beta$ para $\beta'$ é

$$[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daí, se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, então $[(a,b)]_{\beta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ainda

$$[(a,b)]_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta'} [(a,b)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b \end{pmatrix}.$$

Isso equivale a

$$(a,b) = b\,(1,1) + (a-b)\,(1,0).$$

→ Dada a matriz $[I]^{\beta}_{\beta'}$, conseguimos calcular $[I]^{\beta'}_{\beta}$, da seguinte forma:

$$[I]^{\beta'}_{\beta} = \left([I]^{\beta}_{\beta'}\right)^{-1}.$$

→ Se $\beta$, $\beta'$ e $\beta''$ são bases, então

$$[I]^{\beta'}_{\beta''} [I]^{\beta}_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta''}.$$

Exemplo. Considere $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta' = \{(1,1), (1,0)\}$. Então

$$[(1,1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [(1,0)]_{\beta} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí

$$[I]^{\beta'}_{\beta} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então

$$[I]^{\beta}_{\beta'} = \left([I]^{\beta'}_{\beta}\right)^{-1} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$