Subesp. Gerado (cont.)

Relembre:

Uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ é uma expressão da forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m,$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Definimos $[v_1, v_2, \ldots, v_m] = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$.

Se $W = [v_1, v_2, \ldots, v_m]$, então dizemos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de W.

Exemplos.

1. Vamos encontrar um conjunto gerador do espaço $\mathbb{R}^3$.
Denote $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Então $\mathbb{R}^3 = [e_1, e_2, e_3]$. De fato, seja $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Então

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) + (0, 0, \gamma) =$$

$$= \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

Observação. Seja $u \in \mathbb{R}^3$. Então, também vale que

$$[u, e_1, e_2, e_3] = \mathbb{R}^3.$$

De fato, dado $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \cdot e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + 0 \cdot u.$$

Então $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{u, e_1, e_2, e_3\}$ são conjuntos geradores de $\mathbb{R}^3$.

2. Considere os subespaços de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} \text{ e } W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 3b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Então

$$W_1 + W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 3b_2 \end{pmatrix} \mid a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1 \\ b_2 & 2b_1+3b_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & 2b_1+3b_2 \end{pmatrix} \mid a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 3b_2 \end{pmatrix} \mid a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mid a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Daí

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

é um conjunto gerador de $W_1 + W_2$.

Temos que, podemos reescrever os subespaços:

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid c=0,\ d=2b\right\},\quad W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid b=0,\ d=3c$$

daí

$$W_1 \cap W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid c=0, d=2b, b=0, d=3c\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid c=0, b=0, d=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\} =$$

$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$

Daí $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = W_1 \cap W_2.$

Dependência Linear e Base

Definição. Sejam V um esp. vet. e $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$.

(a) Dizemos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é linearmente dependente (ou l.d.) se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ **não** todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0.$$

(b) Dizemos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente (ou l.i.) se não é l.d., ou seja, toda vez que temos

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0,$$

então $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

Exemplos.

1. No plano $\mathbb{R}^2$, dois elementos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ são l.d. se, e somente se, estão numa mesma reta passando pela origem. Se $v_1 \neq 0$, então $\{v_1, v_2\}$ é l.d. se e só se $[v_1] = [v_1, v_2]$.

2. No espaço $\mathbb{R}^3$, então $\{v_1, v_2, v_3\}$ é l.d. se e somente se v_1, v_2 e v_3 estão num mesmo plano que contém a origem.

3. Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto $\{(1,0), (1,1), (0,1)\}$ é l.d. De fato,

$$(1,0) - (1,1) + (0,1) = (0,0).$$

obs. Existem diversas outras comb. lineares que dão 0, por exemplo:

$$5\cdot(1,0) - 5(1,1) + 5(0,1) = (0,0).$$

4. Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é l.i. De fato, assuma que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são tais que
$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = 0 = (0,0).$$
Mas, $\alpha(1,0)+\beta(0,1) = (\alpha,0)+(0,\beta) = (\alpha,\beta)$. Daí, $(\alpha,\beta)=(0,0)$, ou seja, $\alpha=0$ e $\beta=0$. Portanto, provamos que $\{(1,0),(0,1)\}$ é l.i.

5. Analogamente, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é l.i. em $\mathbb{R}^3$ (verifique). Vale também que $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é l.i. em $\mathbb{R}^3$. De fato, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que
$$(0,0,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) \overset{= (\alpha,\alpha,\alpha)+(\beta,\beta,0)+(\gamma,0,0)}{=} (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha).$$
Daí, obtemos que
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$
Daí $\alpha=0$, $\beta=0$ e $\gamma=0$.

Teorema. Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é l.d. se, e somente se, pelo menos um dos vetores é comb. linear dos demais.

Definição. Seja V um esp. vet. Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é uma base de V se:

(i) $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é l.i,

(ii) $[v_1, v_2, \dots, v_m] = V$.

Exemplos.

6. $\{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

7. $\{(1,0),(2,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois o mesmo é l.d.

8. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é l.i., mas não gera $\mathbb{R}^3$. Portanto, não é base de $\mathbb{R}^3$.

9. $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. Já vimos que é l.i., e bastaria mostrar que o mesmo gera $\mathbb{R}^3$ (exercício).

10. Considere o conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então
$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$
é base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (verifique).

Teorema.
(a) Assuma que $[v_1, v_2, \ldots, v_m] = V$. Então existe um subconjunto de $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ que é base de V.
(b) Assuma que $\{w_1, \ldots, w_s\}$ é l.i. Então, existe uma base de V contendo $\{w_1, \ldots, w_s\}$.

Teorema. Seja V um esp. vet. com base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então:
(a) qualquer conjunto com mais que n elementos é l.d.
(b) um conjunto l.i. com exatamente n elem. é base de V.

Corolário. Duas bases de V possuem o mesmo número de elementos.

Definição. A dimensão de V, denotada por $\dim V$, é o nº de elementos de uma base de V.

Exemplos. (i) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ (ii) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (iii) $\dim \mathbb{R}^n = n$ (exercício).
(iv) $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.