Subespaço Vetorial (cont.)

Teorema. Sejam V um esp. vet. e $W_1, W_2 \subseteq V$ subesp. vet. Então $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial.

Exemplos.

1. Considere W_1 e W_2 dois planos em $\mathbb{R}^3$ contendo a origem. Então $W_1 \cap W_2$ é uma reta contendo a origem (se $W_1 \neq W_2$). Se $W_1 = W_2$, então $W_1 \cap W_2 = W_1 = W_2$ é um plano.

2. Considere os subespaços de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid b - c = 0 \right\},$$

$$T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid c = 0 \right\}.$$ (verifique que T_2 é subespaço)

A intersecção é:

$$S \cap T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid b - c = 0 \text{ e } c = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid c = 0 \text{ e } b = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soma de Subespaços

Definição. Sejam V um esp. vet. e $W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços. Define-se a soma de subespaços por
$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Exemplo. Sejam W_1 e W_2 duas retas passando pela origem, não coincidentes. Então $W_1 + W_2$ coincide com o plano contendo W_1 e W_2.

Teorema. $W_1 + W_2$ é um subespaço vetorial.

Demonstração. Temos que verificar três condições:

(i) W_1 e W_2 contém o vetor nulo 0. Daí
$$0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2.$$

(ii) Sejam $u, v \in W_1 + W_2$. Então, podemos escrever
$$u = u_1 + u_2, \text{ com } u_1 \in W_1 \text{ e } u_2 \in W_2,$$
$$v = v_1 + v_2, \text{ com } v_1 \in W_1 \text{ e } v_2 \in W_2.$$
Como W_1 é subesp. vet. e $u_1, v_1 \in W_1$, então $u_1 + v_1 \in W_1$. Da mesma forma, $u_2 + v_2 \in W_2$. Daí
$$u + v = \underbrace{u_1 + v_1}_{\in W_1} + \underbrace{u_2 + v_2}_{\in W_2} \in W_1 + W_2.$$

(iii) exercício. $\square$

Definição. Dizemos que V é soma direta dos subespaços W_1 e W_2, se $V = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Neste caso, denotamos $V = W_1 \oplus W_2$.

Teorema. Sejam V esp. vet. e $W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada $v \in V$ pode ser escrito de forma **única** como $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.

A demonstração será omitida.

Exemplo. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad U = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\},$$

$$Z = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Note que $W + U = \mathbb{R}^3$. De fato, seja $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Então, $(\alpha, \beta, 0) \in W$, $(0, 0, \gamma) \in U$. Daí

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, 0) + (0, 0, \gamma) \in W + U.$$

Alternativamente, pode-se argumentar da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^3 \supseteq W + U = \{(x_1, y_1, 0) + (0, y_2, z_2) \mid x_1, y_1, y_2, z_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(x_1, y_1 + y_2, z_2) \mid x_1, y_1, y_2, z_2 \in \mathbb{R}\} \supseteq \underbrace{\{(x_1, y_1, z_2) \mid x_1, y_1, z_2 \in \mathbb{R}\}}_{= \mathbb{R}^3}.$$

A intersecção

$$W \cap U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ e } x = 0\} = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

portanto, a soma não é direta.

Alternativamente, tome o elemento $(1, 2, 0)$. Então

$$(1, 2, 0) = \underbrace{(1, 0, 0)}_{\in W} + \underbrace{(0, 2, 0)}_{\in U} = \underbrace{(1, 2, 0)}_{\in W} + \underbrace{(0, 0, 0)}_{\in U}$$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

$W = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$,
$Z = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

(b) $W + Z = \mathbb{R}^3$ (exercício).

Temos que

$$W \cap Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, \text{ e } x = y = 0\} = \{(0,0,0)\}.$$

Assim, segue que $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$.

Subespaço Gerado

A noção de subespaço gerado envolvem duais ideias centrais:

→ considerar o menor subespaço contendo um conjunto de vetores,

→ descrever um subespaço via um conjunto de vetores.

Exemplos.

1. Uma reta passando pela origem é completamente determinada por um vetor (o vetor diretor).
2. Um plano passando pela origem é unicamente determinado por dois vetores.

Definição. Sejam V um esp. vetorial e $v, v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Diz-se que v é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_m$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Notação. O conjunto de todos os vetores que são comb. linear de $v_1, v_2, \dots, v_m$ é denotado por $[v_1, v_2, \dots, v_m]$, e denominado o subesp. gerado por $v_1, v_2, \dots, v_m$.

Teorema. $[v_1, v_2, \dots, v_m]$ é subespaço vetorial de V.

A demonstração é parecida com a demonstração de que $W_1 + W_2$ é subespaço vetorial.

Definição. Se W é um subespaço, e existem $v_1, v_2, \dots, v_m \in W$ tais que $W = [v_1, v_2, \dots, v_m]$, então W é denominado *finitamente gerado*. Neste caso, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ será um *conjunto gerador* de W.

Exemplo. Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, os elementos:

$$e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (0,1,0).$$

Uma combinação linear de e_1 e e_2 é, por exemplo,

$$2 \cdot e_1 + (-7) e_2 = (2,-7,0).$$

Ainda, dado $(\alpha, \beta, 0)$, temos que

$$(\alpha, \beta, 0) = (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$$
$$= \alpha e_1 + \beta e_2.$$

Daí $(\alpha, \beta, 0)$ também é comb. linear de e_1 e e_2. Mais ainda,

$$[e_1, e_2] = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Seja agora $f = (2,0,0)$. Então, temos que $[e_1, f] = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Mas, também vale que $[e_1] = [f] = [e_1, f]$.

$[e_1, f] = \{\alpha e_1 + \beta f \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha + 2\beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$