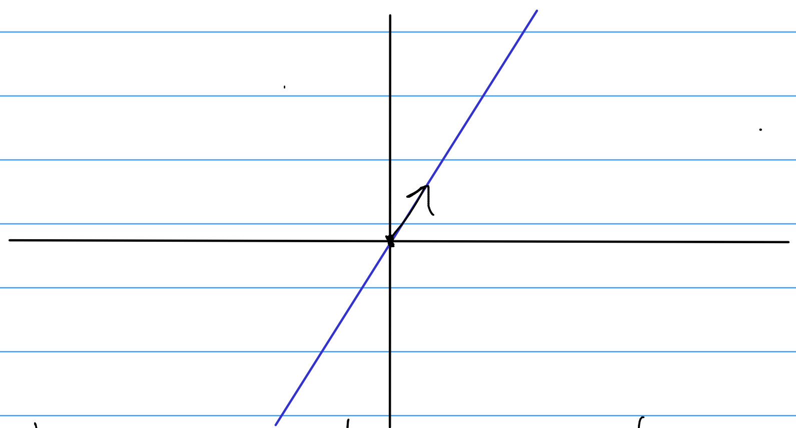
# Subespaço Vetorial

**Definição.** Seja $V$ um espaço vetorial. Um subconjunto $W \subseteq V$ é dito ser um subespaço vetorial se:
(i) $0 \in W$,
(ii) $\forall w_1, w_2 \in W$, vale que $w_1 + w_2 \in W$,
(iii) $\forall w \in W$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, vale que $\lambda w \in W$.

**Atenção.** Uma forma equivalente de definir subespaço é o seguinte: um subconjunto $W \subseteq V$ é subespaço se é **não-vazio** e se satisfaz as condições (ii) e (iii).

**Observação.** 1. A definição de subespaço é um subconjunto não-vazio que é fechado pela soma e multiplicação por escalar.
2. Todo o espaço $V$ é um subespaço vetorial de $V$.
3. O subconjunto $\{0\}$ é sempre um subespaço vetorial.
Os subespaços $\{0\}$ e $V$ são denominados **triviais**.

**Exemplos.**
1. Considere $V = \mathbb{R}^2$, o plano.



Um subespaço vetorial é uma reta passando pela origem (verifique).

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$, o espaço. Um plano passando pela origem é um subespaço vetorial. Um plano que não passa pela origem não é um subespaço vetorial.

3. O subconjunto $W = \{(0, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(i) $0 = (0,0,0,0) \in W$ pois a primeira entrada é 0.

(ii) Tome $w_1 = (0, a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (0, b_1, b_2, b_3) \in W$. Então

$w_1 + w_2 = (0+0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Como a primeira coordenada de $w_1 + w_2$ é 0, segue que $w_1 + w_2 \in W$.

(iii) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $w = (0, a, b, c) \in W$, vale que $\lambda w \in W$ (exercício).

Portanto, mostramos que $W$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

3'. $W = \{(x_1, 0, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$?
$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}$

3''. $W = \{(1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ que não é um subespaço.

4. Considere o conjunto das matrizes 2x2 simétricas:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \left( = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \middle| \, b - c = 0 \right\} \right)$$

é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

(i) $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$.

(ii) Sejam $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in S$, então

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in S.$$

(iii) exercício.

Assim, $S$ é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5. O conjunto solução de um sistema linear homogêneo é um subespaço vetorial (exercício: providencie os detalhes).

**Teorema.** Sejam $V$ um espaço vetorial e $W_1, W_2 \subseteq V$ subespaços. Então $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial.
(a demonstração será omitida)

Exemplo.

6. No espaço $\mathbb{R}^3$, a interseção de dois planos passando pela origem ou é uma reta ou é um plano (no último caso, somente se os planos serem coincidentes).

Pergunta: a união de dois subespaços é subespaço?