Espaço Vetorial

A noção de espaço vetorial pode ser vista como a axiomatização de vetores no plano, em conjunto com a soma de vetores e multiplicação por escalar.

Definição. Um espaço vetorial real é um conjunto V, munido de duas operações:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V,$$
$$(v, w) \longmapsto v + w, \qquad\qquad (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

denominadas soma e multiplicação por escalar, e satisfazendo:

(i) $v + w = w + v, \quad \forall v, w \in V$

(ii) $(v + w) + u = v + (w + u), \quad \forall u, v, w \in V$

(iii) existe um elemento $0 \in V$ tal que
$$v + 0 = v, \quad \forall v \in V$$

(iv) para cada $v \in V$, existe $w \in V$ tal que
$$v + w = 0$$

(v) $1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V$

(vi) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, v \in V$

(vii) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$

(viii) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot v, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v \in V.$

Observações.

I) O ponto na multiplicação por escalar será omitido. Ou seja, vamos escrever λv ao invés de $\lambda \cdot v$.

II) Um espaço vetorial é uma terna $(V, +, \cdot)$. Entretanto, é comum, por abuso de linguagem, chamarmos de espaço vetorial somente o conjunto V.

III) Os elementos de V serão denominados de vetores. O vetor 0 da propriedade (iii) será denominado de vetor nulo.

Exemplos.

1. O conjunto de vetores no plano (ou no espaço), munido da soma de vetores e multiplicação por escalar é um espaço vetorial real.

2. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da soma usual de $\mathbb{R}$, e o produto usual de $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real (verifique).

3. O conjunto das n-uplas de números reais
$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\},$$
munido das seguintes operações: se $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $w = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se
$$v + w = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$\lambda v = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Então, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial. De fato:

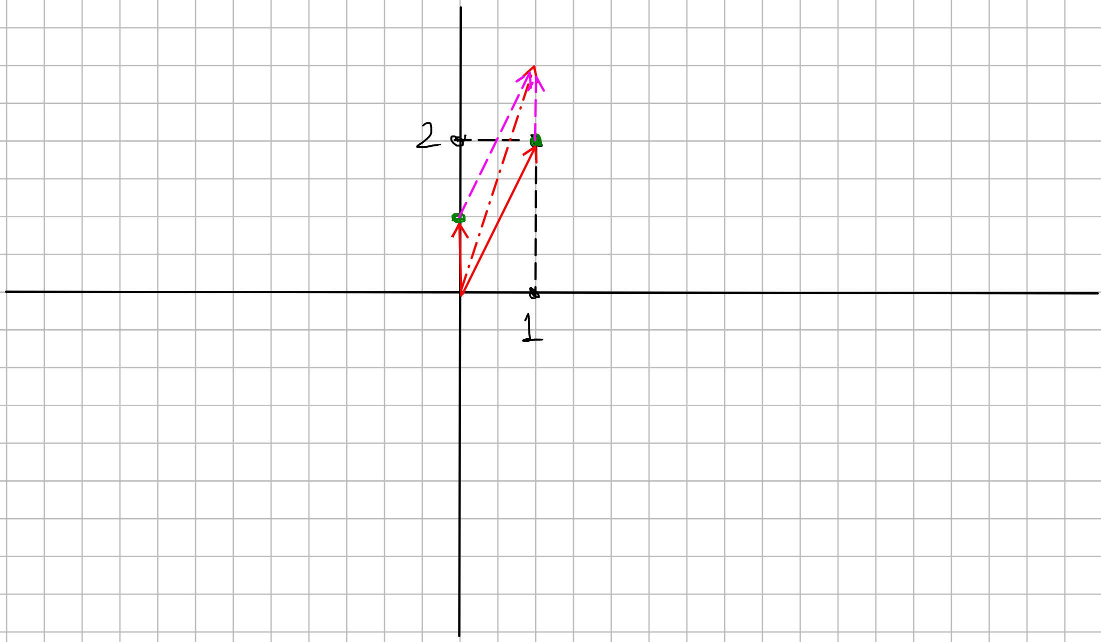
(i) $v + w = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \ldots, b_n + a_n) = w + v$

(iii) O vetor nulo é $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, pois
$$v + 0 = (a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots, a_n + 0) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = v$$

(iv) Dado $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tome $w = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$. Daí
$$v + w = (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \ldots, a_n + (-a_n)) = (0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

(ii), (v)-(viii) fica de exercício.

3'. Caso especial $n = 2$: $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Elementos deste conjunto são, por exemplo, $(1,2), (0,1) \in \mathbb{R}^2$.
$$(1,2) + (0,1) = (1+0, 2+1) = (1,3)$$


2
1

4. O conjunto das matrizes $M_{n\times m}(\mathbb{R})$, de tamanho $n\times m$ e com entradas em $\mathbb{R}$, com operações usuais de soma de matrizes e multiplicação por escalar é um espaço vetorial real (verifique).

5. Seja $n\in\mathbb{N}$ um número fixo. Defina

$$P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de polinômios reais de grau menor ou igual a n, em que X é uma variável.

Tal conjunto admite as seguintes operações:

$$(a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n) + (b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \cdots + (a_n+b_n)X^n,$$

$$\lambda (a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \cdots + \lambda a_n X^n.$$

Assim, $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real (verifique).

6. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial real, munido das seguintes operações:

→ soma usual de números complexos,

→ multiplicação de um número real por um número complexo.

As operações são:

→ $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$,

→ $\lambda \cdot (a + bi) = \lambda a + \lambda b\, i$

Note que fica similar a $\mathbb{R}^2$.

7. Os conjuntos $\mathbb{C}^n$, $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $P_n(\mathbb{C})$ admitem estrutura de espaço vetorial real.

Observação. Podemos definir o que seria um espaço vetorial complexo, bastando trocar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ na definição de espaço vetorial real. Os exemplos 6 e 7 também admitem estrutura de esp. vet. complexo.

8. Seja $V = \{ a \in \mathbb{R} \mid a > 0 \}$ o conjunto dos números reais positivos. Defina as operações em V:

$$a \oplus b = ab, \quad a, b \in V,$$

$$\lambda \odot a = a^{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ a \in V.$$

A terna $(V, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial real. De fato:

(i) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$

(ii) $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (bc) = a(bc) = (ab)c = (ab) \oplus c = (a \oplus b) \oplus c$

(iii) O vetor nulo é 1, pois

$$1 \oplus a = 1 \cdot a = a$$

(iv) exercício.

(v) $1 \odot a = a^1 = a$

(vi) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot a = a^{\lambda_1 + \lambda_2} = a^{\lambda_1} \cdot a^{\lambda_2} = a^{\lambda_1} \oplus a^{\lambda_2} = (\lambda_1 \odot a) \oplus (\lambda_2 \odot a)$

(vii) e (viii) exercício.

Pergunta: em que situação natural o exemplo 8 aparece?

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \in V$$

$$x + y \longmapsto e^{x+y} = e^x e^y = e^x \oplus e^y$$

$$(\lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda \cdot x \longmapsto e^{\lambda x} = (e^x)^{\lambda} = \lambda \odot e^x$$