MAT2351 Cálculo para funções de várias variáveis I
Lista 7 (2022)

6. Pontos críticos de $\mathbb{R}^2$

6.1 Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

(a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$

(b) $z = x^2y^2$

(c) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$

(d) $z = x^3y^3$

(e) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$

(f) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

6.2 Determine os valores de a para os quais a função $f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$

(a) tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;

(b) tenha exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.

(c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?

(d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

7. Máximos e mínimos

7.1 Esboce a região D e determine o máximo e o mínimo absolutos da função $f : D \to \mathbb{R}$ quando

(a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$ e D é o triângulo (com interior e lados inclusos) cujos vértices são $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$;

(b) $f(x, y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$;

(c) $f(x, y) = xy$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$;

7.2 Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

(a) $f(x, y) = xy$, sujeito a $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$;

(b) $f(x, y, z) = xyz$, sujeito a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$;

(c) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x + y + z = 1$.

7.3 Determine o valor máximo e o valor mínimo de f na região S sendo:

(a) $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 4 \text{ e } x, y, z \geq 0\}$.

7.4 Encontre o máximo e o mínimo de $f(x, y, z) = 2x + y - z^2$ no compacto C, em que:

(a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}$;

(b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}$;

7.5 Justifique a existência de solução de cada um dos problemas a seguir e a determine.

(a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.

(b) Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?

(c) Determine os pontos da interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$ mais próximos e mais distantes da origem.

(d) Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

(e) Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo num plano, calcule o valor máximo de $\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\gamma)$.

(f) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.