MAT2351 Cálculo para funções de várias variáveis I
Lista 6 (2022)

3. Conjuntos abertos e fechados

3.1 Verifique se cada um dos conjuntos a seguir é aberto, fechado e/ou compacto em $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 1\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x + y > 0\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x + y \geq 0\}$

(g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ e } 1 < y < 3\}$

(h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$

3.2 Sejam A_1 e A_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ abertos. Mostre que $A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2$ são abertos.

4. Derivadas parciais de ordem superior

4.1 Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem.

(a) $f(x, y) = x^3y^2$

(b) $f(x, y) = 4x^3y^4 + y^3$

(c) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$

(d) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

4.2 Seja $z = (x + y)e^{\frac{x}{y}}$. Verifique que

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = 0.$$

4.3 Sejam $f,\, g : A \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2, em que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto, e tais que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Prove que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} = 0.$$

4.4 Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

4.5 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f, em que g é:

(a) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $x = t^2$ e $y = \operatorname{sen} t$,

(b) $g(t) = t^3 \dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)$,

(c) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5\dfrac{\partial f}{\partial y}(\operatorname{sen} 3t, t)$.

4.6 Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $g(t) = f(5t, 4t)$. Expresse $g''(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

5. Polinômio de Taylor

5.1 Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

(a) $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1,1)$

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$