MAT2351 Cálculo para funções de várias variáveis I
Lista 5 (2022)

1. Gradiente e curva e superfície de nível

1.1 Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado:
(a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$,
(b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

1.2 Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$ e que a sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ neste ponto?

1.3 É dada uma curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível 10 de $f(x, y) = x^2 + y^2$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$. Determine a equação da reta tangente a γ em $(1, 3)$.

1.4 Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

1.5 Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 22$.

1.6 Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado:
(a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.
(b) $2xyz = 3$ em $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$.
(c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$.

1.7 A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3+y^3+z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

1.8 Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

1.9 É dada uma função diferenciável $z = f(x, y)$ cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.10 A imagem da curva γ está contida na intersecção das superfícies $x^2+y^2+z^2=3$ e $x^2+3y^2-z^2=3$. Suponha $\gamma(t_0)=(1,1,1)$ e $\gamma'(t_0)\neq(0,0,0)$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

1.11 A imagem da curva γ está contida na intersecção da superfície (em $\mathbb{R}^3$) $x^2+y^2=2$ com a superfície $x^2+y^2+z^2=3$. Assuma que $\gamma(t_0)=(1,1,1)$ e $\gamma'(t_0)\neq(0,0,0)$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

1.12 É dada uma curva γ cuja imagem é a intersecção das superfícies $4x^2+y^2=1$ e $x+y+z=1$. Assuma que $\gamma(t_0)=(0,1,0)$ e $\gamma'(t_0)\neq(0,0,0)$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

1.13 Considere a função

$$f(x,y)=\frac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}.$$

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,2,1)$. (Dica: encontre uma função $F(x,y,z)$ que não envolve radicais e tal que $z=f(x,y)$ seja definida implicitamente por $F(x,y,z)=0$).

1.14 Determine um plano que passe pelos pontos $(5,0,1)$ e $(1,0,3)$ e que seja tangente à superfície $x^2+2y^2+z^2=7$.

2. Derivada direcional

2.1 Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)$, em que $u=\frac{1}{\|v\|}v$, quando:

(a) $f(x,y)=x^2-3y^2$, $(x_0,y_0)=(1,2)$ e $v=(2,1)$.
(b) $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$, $(x_0,y_0)=(1,1)$ e $v=(3,4)$.
(c) $f(x,y)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$, $(x_0,y_0)=(2,3)$ e $v=(1,1)$.
(d) $f(x,y)=xy$, $(x_0,y_0)=(1,1)$ e $v=(1,1)$.

2.2 Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

(a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ em $(1,1)$.
(b) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ em $(1,-1)$.
(c) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-2y^2}$ em $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

2.3 Calcule a derivada direcional de $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$ no ponto $(2,2)$ e na direção $u=\frac{1}{\|v\|}v$, em que

(a) $v=(1,2)$, (b) $v=(-1,2)$.

2.4 Uma função diferenciável $f(x,y)$ satisfaz $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}(1,1)=3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial u_2}(1,1)=-1$, em que u_1 e u_2 são vetores unitários na direção $(3,4)$ e $(4,-3)$, respectivamente.

(a) Calcule $\nabla f(1,1)$
(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,1)$, em que $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2.5 Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto e direção w indicados:
(a) $f(x,y,z) = xyz$ em $(1,1,1)$ e na direção $w = (2,1,-1)$.
(b) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1,2,-1)$ e na direção $w = (1,2,1)$.

2.6 A função diferenciável $f(x,y,z)$ tem, no ponto $(1,1,1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $(0,4,3)$, igual a 2 na direção $(-4,3,0)$ e igual a 0 na direção $(0,1,0)$. Calcule o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1,1)$.

2.7 Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Seja $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \neq \nabla\langle f(0,0), u\rangle.$$

Explique.

2.8 O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Considere a curva de nível de f que contém P. Encontre a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

2.9 Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2), t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f. Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2,8)$. Sabendo que a reta r contém o ponto $(1,-4)$, determine o vetor gradiente de f no ponto $(2,8)$.

2.10 Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é a do vetor $(1,1)$.

2.11 Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

2.12 Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de ambas curvas $\gamma(t) = \left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}\right)$ e $\xi(u) = \left(u+1, u, u+2+\dfrac{1}{u}\right)$, $u \neq 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.