# MAT2351 Cálculo para funções de várias variáveis I
# Lista 4 (2022)

## 8. Derivadas parciais

**8.1** Determine as derivadas parciais:

(a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

(b) $f(x,y) = \cos(xy)$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

(e) $f(x,y) = xye^{xy}$

(f) $f(x,y) = x^2\ln(1+x^2+y^2)$

**8.2** Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ (Dica: defina g(x)=f(x,0)).

**8.3** Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

**8.4** Seja $g(x,y) = \sqrt[3]{3x^4+2y^4}$. Mostre que $g$ é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

**8.5** Assuma que $z = f(x,y)$ admita derivadas parciais, e que é dada implicitamente por $xyz + z^3 = x$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de $x$, $y$, $z$.

**8.6** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e assuma que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que $f$ é constante.

## 9. Diferenciabilidade e Plano tangente

**9.1** Verifique se a função $f$ é diferenciável em $(0,0)$, em que:

(a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**9.2** Verifique que as seguintes funções são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$

(b) $f(x,y) = x^4 + y^3$

(c) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

(d) $f(x,y) = x\cos(x^2 + y^2)$

**9.3** Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

(a) $f(x,y) = 2x^2y$ em $(1,1,f(1,1))$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(0,1,f(0,1))$

(c) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ em $(2,2,f(2,2))$

**9.4** Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

**9.5** Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

**9.6** $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1,1,3)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

**9.7** Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que $f$ é contínua em $(0,0)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) $f$ é diferenciável em $(0,0)$?

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

**9.8** Calcule $\nabla f(x,y)$, em que:

(a) $f(x,y) = x^2y$

(b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

(d) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

## 10. Regra da Cadeia

**10.1** Calcule $\dfrac{dz}{dt}$, em que:

(a) $z = \operatorname{sen}(xy)$, $x = 3t$ e $y = t^2$

(b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$

(c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \operatorname{sen} 3t$, $y = \cos 3t$.

**10.2** Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.
(a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de $f$.
(b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \dfrac{1}{3}$.

**10.3** Expresse $\dfrac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de $f$, sendo $z = f(x, y)$, e
(a) $x = t^2$ e $y = 3t$
(b) $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$

**10.4** Suponha que, para todo $t$, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2).$$

**10.5** Admita que, para todo $(x, y)$,

$$4y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2.$$

Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2\cos t, \operatorname{sen} t)$.

**10.6** A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma$ no ponto $\gamma(1)$.

**10.7** Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de $f$.

**10.8** Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

**10.9** Seja $g(x)$ uma função diferenciável tal que $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in \operatorname{dom}(g)$. Mostre que

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

para todo $x \in \operatorname{dom}(g)$, com $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$.

**10.10** Assuma que $f(t)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que $g(t, f(t)) = 0$, para todo $t$. Suponha que $f(0) = 1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = 2$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = 4$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma(t) = (t, f(t))$, no ponto $\gamma(0)$.

**10.11** Seja $g(t) = f\left(3t^2, t^3, e^{2t}\right)$, e assuma que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$.

(a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de $f$.

(b) Calcule $g'(0)$.