

MAT2351 Cálculo para funções de várias variáveis I

Lista 3 (2022)

6. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E CURVA DE NÍVEL

6.1 Para cada função dada, determine o domínio:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

(d) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

(b) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

(e) $f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

(c) $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$

6.2 Esboce uma família de curvas de nível das seguintes funções. Utilize um software gráfico para comparar seu esboço:

(a) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$

(c) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$

(b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$

(d) $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

6.3 Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

(a) $f(x, y) = x + 2y - 3$, $k = -2$;

(b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}$, $k = 5$;

6.4 Esboce os gráficos das seguintes funções. Utilize um software gráfico para comparar o seu esboço:

(a) $f(x, y) = 1 - x - y$

(g) $f(x, y) = y^2 + x$

(b) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(h) $f(x, y) = xy$

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

(i) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(d) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

(j) $f(x, y) = \frac{1}{4x^2 + 9y^2}$

(e) $f(x, y) = y^2 - x^2$

(k) $f(x, y) = (x - y)^2$

(f) $f(x, y) = y^2 + 1$

7. LIMITE E CONTINUIDADE

7.1 Calcule os seguintes limites, caso existam. Justifique quando não existirem:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{(g)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2} \\
 \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{(h)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2} \\
 \text{(c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{(i)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\
 \text{(d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4 + x^2 y + y^2} & \text{(j)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y + y^4 + x^4}{x^3 y - xy^3} \\
 \text{(e)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2} & \text{(k)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + \sin(x^2 + y^2)}{y^4 + \sin(x^2 + y^2)} \\
 \text{(f)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{(l)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^4 + x^5 \sqrt[3]{y^4}}{x^6 + y^8}
 \end{array}$$

7.2 Assuma que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = t_0$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L$, em que g é contínua em t_0 ou g não está definido em t_0 , e $\text{Im } f \subseteq \text{dom}(g)$. Mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(f(x, y)) = L.$$

7.3 Decida se os limites abaixo existem, determinando seu valor em caso afirmativo:

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\
 \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)
 \end{array}$$

7.4 Determine os pontos de continuidade da seguinte função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)(x - 1)^2}{(x^2 + y^2)[(x - 1)^2 + (y - 1)^2]}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } (x, y) \neq (1, 1), \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$