MAT2351 Cálculo para funções de várias variáveis I
Lista 2 (2022)

4. Comprimento de arco

4.1 Calcule o comprimento da curva:
- (a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t)$.
- (b) $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2t - 1, t + 1)$.
- (c) $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \big(\cos t, \mathrm{sen}\, t, e^{-t}\big)$.
- (d) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \big(e^{-t}\cos t, e^{-t}\mathrm{sen}\, t, e^{-t}\big)$.
- (e) $\gamma : [0, e] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \ln t)$.
- (f) $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 - \cos t, t - \mathrm{sen}\, t)$.
- (g) $\gamma : [-1, 0] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(t, \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\big)$.

4.2 Relembre que uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ com derivada contínua está parametrizada pelo comprimento de arco se $\|\gamma'(s)\| = 1$, $\forall s \in [a, b]$. Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco:
- (a) $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (\cos s, \mathrm{sen}\, s)$.
- (b) $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = \left(R\cos\dfrac{s}{R}, R\,\mathrm{sen}\dfrac{s}{R}\right)$, em que $R > 0$ é um real fixo.
- (c) $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{5}}, \dfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)$.

4.3 Reparametrize as seguintes curvas pelo comprimento de arco:
- (a) $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2t + 1, 3t - 1)$.
- (b) $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2\cos t, 2\mathrm{sen}\, t)$.
- (c) $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, t)$.
- (d) $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\mathrm{sen}\, t)$.

5. Coordenadas polares

5.1 Desenhe a curva dada em coordenadas polares. Compare seu desenho com um software gráfico (por exemplo, desmos):

- (a) $\rho = e^{-\theta}$, $\theta \geq 0$
- (b) $\rho = \cos\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$
- (c) $\rho = 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- (d) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\rho > 0$
- (e) $\rho = \mathrm{tg}\,\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$
- (f) $\rho = \cos(3\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- (g) $\rho^2 = \frac{1}{1+(\mathrm{sen}(\theta))^2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- (h) $\rho = 2 - \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- (i) $\rho = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- (j) $\rho = 4\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- (k) $\rho = (\cos\theta)^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

5.2 Escreva, em coordenadas polares, a equação da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tomando como pólo a origem e como eixo polar o eixo Ox.

5.3 Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares:

(a) $\rho = 2 - \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(b) $\rho = \sqrt{\cos\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(c) $\rho = \cos(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(d) $\rho = \cos(3\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

5.4 Calcule a área da intersecção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares:

(a) $\rho = 2 - \cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(b) $\rho = 3$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(c) $\rho = \operatorname{sen}\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $\rho = \cos\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

(d) $\rho = 1$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

5.5 Calcule a área do conjunto de todos os pontos (θ, ρ) (em coordenadas polares) tais que $\theta^2 \leq \rho \leq \theta$, em que $0 \leq \theta \leq \pi$.