# MAT2351 Cálculo para funções de várias variáveis I (2022)
# Lista 1

## 1. Funções de uma variável a valores em $\mathbb{R}^n$

**1.1** Desenhe a imagem das seguintes funções. Verifique a sua resposta usando algum software gráfico (por exemplo, desmos):

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (1, t)$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t + 1)$
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (2t - 1, t + 2)$
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t^3)$
(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t)$
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t^4)$
(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t)$
(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$

**1.2** Desenhe a imagem das seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Verifique a sua resposta usando algum software gráfico (por exemplo, geogebra):

(a) $f(t) = (1, 2t, t)$
(b) $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$
(c) $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$
(d) $f(t) = (e^{-t}, \cos t, \operatorname{sen} t)$

**1.3** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dadas por $f(t) = (t, \operatorname{sen} t, 2)$ e $g(t) = (3, t, t^2)$. Calcule

(a) $f \cdot g$
(b) $e^{-t} f$
(c) $f - 2g$
(d) $f \times g$

**1.4** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (t, 2, t^2)$ e $g(t) = (t, -1, 1)$. Calcule:

(a) $f \cdot g$
(b) $f \times g$

**1.5** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ e $g(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$. Calcule:

(a) $f \cdot g$
(b) $f \times g$

**1.6** Sejam $f, g, h : I \to \mathbb{R}^3$ funções, em que $I \subseteq \mathbb{R}$. Verifique que:
(a) $f \times g = -g \times f$
(b) $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$
(c) $f \times (g + h) = f \times g + f \times h$

## 2. Limite e continuidade

**2.1** Se existir o limite, calcule:

(a) $\lim_{t\to 1} f(t)$, em que $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}^3$ é dado por $f(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \dfrac{t-1}{t}\right)$.

(b) $\lim_{t\to 0} f(t)$, em que $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^3$ é dado por $f(t) = \left(\dfrac{\operatorname{tg} 3t}{t}, \dfrac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right)$.

(c) $\lim_{t\to 2} f(t)$, em que $f : (2,\infty) \to \mathbb{R}^3$ é dado por $f(t) = \left(\dfrac{t^3-8}{t^2-4}, \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)}{t-2}, 2t\right)$.

**2.2** Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : I \to \mathbb{R}$ em que $I \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Assuma que os limites $\lim_{t\to t_0} f(t)$, $\lim_{t\to t_0} g(t)$, e $\lim_{t\to t_0} \alpha(t)$ existam. Verifique que os limites a seguir existem e vale:

(i) $\lim_{t\to t_0} (f+g)(t) = \lim_{t\to t_0} f(t) + \lim_{t\to t_0} g(t)$.

(ii) $\lim_{t\to t_0} (f\cdot g)(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\cdot\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)$.

(iii) $\lim_{t\to t_0} (\alpha f)(t) = \left(\lim_{t\to t_0} \alpha(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)$.

(iv) Se $n = 3$, então $\lim_{t\to t_0} (f\times g)(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\times\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)$.

(b) Se $f$, $g$ e $\alpha$ são contínuas em $t_0$, verifique que $f+g$, $f\cdot g$ e $\alpha f$ também são contínuas em $t_0$. Se, $n = 3$, mostre que $f\times g$ também é contínua em $t_0$.

## 3. Derivada e reta tangente

**3.1** Calcule $\dfrac{df}{dt}$ e $\dfrac{d^2f}{dt^2}$, em que:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = \left(3t^2, e^{-t}, \ln(t^2+1)\right)$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = \left(\sqrt[3]{t^2}, \cos(t^2), 3t\right)$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = \left(\operatorname{sen}(5t), \cos(4t), -e^{-2t}\right)$.

**3.2** Determine a equação da reta tangente à trajetória da função dada, no ponto dado:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, e $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t)$, e $f(1)$

(c) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \dfrac{1}{t}, t^2\right)$, e $f(2)$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $f(t) = \left(t, t^2, t, t^2\right)$, e $f(1)$

**3.3** Seja $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}^n$ diferenciável, e assuma que $f'(t) = 0$ para todo $t \in ]a, b[$. Mostre que $f$ é constante.

**3.4** Sejam $f : I \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : J \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, em que $J$, $I \subseteq \mathbb{R}$, e $\alpha(t) \in I$, $\forall t \in J$. Seja $g : J \to \mathbb{R}^n$ dada pela composição $g = f \circ \alpha$. Mostre que $g$ é derivável e que

$$\frac{dg}{dt}(t) = \alpha'(t) f'(\alpha(t)), \quad t \in J.$$