4.1 6. $S=\{(x,x,\dots,x) \mid x\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, munido das operações usuais de $\mathbb{R}^n$, é um espaço vetorial?

Relembre: Se V é um esp. vet. e $W\subseteq V$ é um subconjunto, então W é um subespaço vetorial de V se e só se W, munido das operações induzidas de V, é um esp. vetorial.

Portanto basta verificar que S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

(i) $(0,0,\dots,0)\in S$

(ii) Dados $(x,x,\dots,x)$, $(y,y,\dots,y)\in S$, então

$$(x,x,\dots,x)+(y,y,\dots,y)=(x+y,x+y,\dots,x+y)\in S$$

(iii) Sejam $\lambda\in\mathbb{R}$ e $(x,x,\dots,x)\in S$. Então

$$\lambda\cdot(x,x,\dots,x)=(\lambda x,\lambda x,\dots,\lambda x)\in S$$

Daí S é um Subesp. de $\mathbb{R}^n$. Em particular, S é um esp. vet. com as operações usuais de $\mathbb{R}^n$.

4.2. 8. Expresse, como comb. linear de $u=(2,1,4)$, $v=(1,-1,3)$ e $w=(3,2,5)$:

(a) $(-9,-7,-15)$ (b) $(6,11,6)$

(c) $(0,0,0)$

Uma comb. linear é uma expressão da forma
$au+bv+cw$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$

(a) Queremos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$au + bv + cw = (-9, -7, -15)$$
$$\parallel$$
$$a(2,1,4) + b(1,-1,3) + c(3,2,5)$$
$$\parallel$$
$$(2a, a, 4a) + (b, -b, 3b) + (3c, 2c, 5c) =$$
$$= (2a+b+3c,\ a-b+2c,\ 4a+3b+5c)$$

Obtemos então:

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = -9 \\ a - b + 2c = -7 \\ 4a + 3b + 5c = -15 \end{cases}$$

Daí, basta resolver o sistema acima.

(b) mesma ideia

(c) $(0,0,0) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$

4.3 2. Quais subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são l.d.?

(a) $\{(4,-1,2), (-4,10,2)\}$

(b) $\{(-3,0,4), (5,-1,2), (1,1,3)\}$

(c modificado) $\{(8,-1,3), (4,0,1), (0,0,1)\}$

(d) $\{(-2,0,1), (3,2,5), (6,-1,1), (7,0,-2)\}$

Relembre: Um conj. é l.d. se um dos vetores do conjunto é comb. linear dos demais.

Em particular, um $\{u_1, u_2\}$ é l.d. se e só se um é múltiplo do outro.

(a) é l.i., pois um não é múltiplo do outro

(b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com

$$a(-3,0,4) + b(5,-1,2) + c(1,1,3) = (0,0,0)$$
$$\parallel$$
$$(-3a + 5b + c, -b + c, 4a + 2b + 3c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 5b + c = 0 \\ -b + c = 0 \\ 4a + 2b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 26/3 & 13/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 39/3 \end{pmatrix}$$

Daí $a = b = c = 0$, e portanto, o conjunto é l.i.

(c (modificado)) $\{(8,-1,3), (4,0,1), (0,0,1)\}$

Queremos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(8,-1,3) + b(4,0,1) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$\parallel$$
$$(8a + 4b, -a, 3a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 4b = 0 \\ -a = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases}$$

Para checar se o sistema tem solução única, basta checar o determinante da matriz dos seus coeficientes (isso pois temos 3 equações e 3 variáveis).

Temos que

$$\det\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$

Portanto, o conjunto é l.i.

(d) Sabe-se que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e temos um conjunto com 4 vetores.

Relembre que, num esp. vet. de dim n, qualquer subconj. com mais de n vetores é l.d.

Portanto, o conjunto do item (d) é l.d.

4.4. 3.(a) $\{(1,0,0), (2,2,0), (3,3,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$?

→ Não é base, pois $(0,0,1)$ não é comb. linear dos três vetores, pois qualquer combinação é tal que a 3ª coordenada é 0.

→ Não é base, pois o conj. é l.d.:

$$0 \cdot (1,0,0) + 3(2,2,0) + (-2)(3,3,0) = (0,0,0).$$

8. Seja $B = \{(1,-1),(1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Encontre $(w)_B$:

(a) $w=(1,0)$ (b) $w=(0,1)$ (c) $w=(1,1)$.

(a) Queremos $a,b\in\mathbb{R}$ tais que

$$(1,0) = a(1,-1) + b(1,1) = (a+b, -a+b)$$

$$\iff \begin{cases} a+b = 1 \\ -a+b = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} b = 1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

Portanto

$$(1,0) = \frac{1}{2}(1,-1) + \frac{1}{2}(1,1) \Rightarrow (1,0)_B = (1/2, 1/2)$$

(b) Mesma coisa!

$$(0,1) = a(1,-1) + b(1,1) = (a+b, -a+b)$$

$$\iff \begin{cases} a+b = 0 \\ -a+b = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

$$\therefore (0,1) = (-1/2)(1,-1) + 1/2(1,1) \Rightarrow (0,1)_B = (-1/2, 1/2)$$

(c) Método 1: note que $(1,1)\in B$. Daí $(1,1)_B = (0,1)$.

Método 2: note que $(1,1) = (1,0) + (0,1)$.

$$\Rightarrow (1,1)_B = (1,0)_B + (0,1)_B =$$

$$= (1/2, 1/2) + (-1/2, 1/2) = (0,1)$$

Método 3: repete o feito em (a) e (b).

4.5 7. (d) encontre uma base de

$$W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = a+c\}$$

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = a+c\} = \{(a,a+c,c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(a,a,0) + (0,c,c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a\cdot(1,1,0) + c\cdot(0,1,1) \mid a, c \in \mathbb{R}\} = ger\{(1,1,0),(0,1,1)\}.$$

Note que $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ é l.i. (pois um não é múltiplo do outro). Daí $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ é base do subespaço.
Segue que $\dim W = 2$.

8. (c) encontre a dimensão de $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a=b=c=d\} = S$.

Temos que
$$S = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a=b=c=d\} = \{(d,d,d,d) \mid d \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{d\cdot(1,1,1,1) \mid d \in \mathbb{R}\} = ger\{(1,1,1,1)\}.$$

O conj. $\{(1,1,1,1)\}$ é l.i. (pois constitui de um único elemento não nulo), e portanto é base de S.
Daí $\dim S = 1$.

4.6 7. Seja $B = \{(2,2),(4,-1)\}$, $B' = \{(1,3),(-1,-1)\}$.

(a) Calcule $P_{B \to B'}$

(b) Calcule $P_{B' \to B}$

(c) e (d) Se $w = (3,-5)$, calcule $(w)_B$ e $(w)_{B'}$.

(b)

$$P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} | & | \\ [(1,3)]_B & [(-1,-1)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(2,2) + b(4,-1) = (1,3) \quad e \quad c(2,2) + d(4,-1) = (-1,-1)$$

$$\underset{(2a+4b,\ 2a-b)}{\parallel} \qquad\qquad \underset{(2c+4d,\ 2c-d)}{\parallel}$$

Portanto, queremos resolver os dois sistemas lineares:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4y = -1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Então, vamos escalonar:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{(ocultando contas)}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13/10 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \end{array}\right)$$

Ou seja,

$$[(1,3)]_B = \begin{pmatrix} 13/10 \\ -2/5 \end{pmatrix} \quad e \quad [(-1,-1)]_B = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí

$$P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} | & | \\ [(1,3)]_B & [(-1,-1)]_B \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $P_{B\to B'} = \left(P_{B'\to B}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ -2 & -13/2 \end{pmatrix}$

(c) $w = (3,-5)$, $\quad B' = \{(1,3), (-1,-1)\}$.

queremos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(3,-5) = a\,(1,3) + b\,(-1,-1) = (a-b,\ 3a-b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 3a - b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (3,-5) = -4\,(1,3) + (-7)\,(-1,-1)$$

Portanto, $(3,-5)_{B'} = (-4,-7)$.

$$[(3,-5)]_B = P_{B'\to B} \cdot [(3,-5)]_{B'} = \begin{pmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -26/5 + 7/2 \\ 8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/10 \\ 8/5 \end{pmatrix}$$

4.6

20. Se B_1, B_2, B_3 são bases de $\mathbb{R}^2$, e

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{B_2 \to B_3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

então $P_{B_1 \to B_3} = ?$

$$P_{B_1 \to B_3} = P_{B_2 \to B_3} P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 11 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{B_1 \to B_3} [v]_{B_1} = P_{B_2 \to B_3} P_{B_1 \to B_2} [v]_{B_1} = P_{B_2 \to B_3} [v]_{B_2} = [v]_{B_3}$$