

Tópicos extras

Matrizes com entradas em $\mathbb{C}$.

Estudamos sistemas lineares com coeficientes reais, matrizes com entradas em $\mathbb{R}$, espaços vetoriais reais, etc... mas, às vezes pode ser interessante "passarmos para $\mathbb{C}$ ".

Por exemplo, seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, que não admite raízes reais. Portanto, A não é diagonalizável em $\mathbb{R}$.

Porém, $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$. Daí, A admite dois autovalores complexos. Segue que A é diagonalizável, se visto como uma matriz em $\mathbb{C}$, e vale que

$$A \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Equações diferenciais. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ fixo.}$$

Sabe-se que

$$(**) \quad \frac{d}{dx} f(x) = e^{\lambda x} \left(\frac{d}{dx} \lambda x \right) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$$

Daí f satisfaz

$$y' = \lambda y. \quad (*)$$

A equação $(*)$ é uma equação diferencial, em que "o queremos achar" é uma função.

A equação $(**)$ diz que $f(x) = \lambda e^x$ é solução de $(*)$.

Campos de vetores. Um campo de vetores no plano é uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Deve-se interpretar da seguinte forma: em cada ponto do plano, desenha-se o vetor $f(x, y)$.

Estamos interessados em dois problemas:

1. encontre uma curva no plano que "se encaixe" no plano.
(formalmente: queremos $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$)

2. encontre propriedades da curva sem necessariamente encontrar a curva.

O problema 1, em geral, é extremamente difícil. Por isso, às vezes é preferível abordar o problema 2.

Exemplo. Estudo de evolução da temperatura de um corpo no tempo.

Temos uma câmara a temperatura constante T . Coloca-se um corpo A com temperatura inicial T_0 na câmara. Como evolui a temperatura de A no tempo?

"A variação de temperatura de A é proporcional a diferença de temperatura de A e de T ."

Uma classe especial de campos de vetores ocorre quando a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear.

Neste caso, podemos representar o campo de vetores através da matriz de f . Sempre conseguimos encontrar a solução do problema 1 neste caso.

Assim, se $A = [f]$, então queremos

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\gamma'(t) = A \gamma(t).$$

A solução que passa por $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ é

$$\gamma(t) = e^{tA} X_0,$$

em que

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (tA)^n.$$

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
 $f(x, y) = (-2x + y, -y)$.

Então

$$[f] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: A$$

Note que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, se $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$M^{-1} e^{tA} M = e^{t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = M \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Portanto, a curva solução de $f(x,y) = (-2x+y, -y)$ que passa por (x_0, y_0)

$$\gamma(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{-2t} + y_0 (-e^{-2t} + e^{-t}) \\ y_0 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
 $f(x,y) = (x-y, x+2y)$.

Então

$$[f] = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável. Isso porque 3 é seu único autovalor e $\mathcal{V}_3 = \text{ger} \{ (1,1) \}$ (verifique).

Neste caso, temos outras formas canônicas, por exemplo a forma de Jordan. Vale que

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$e^{t \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{3t} & t e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Daí

$$e^{t[f]} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{3t} & -te^{3t} \\ te^{3t} & (1-t)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a curva solução de f que passa por (x_0, y_0) é

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0(t+1)e^{3t} - y_0 t e^{3t} \\ x_0 t e^{3t} + y_0(1-t)e^{3t} \end{pmatrix}$$