

Diagonalização

Relembre que se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é operador linear e β é base de $\mathbb{R}^n$, então podemos construir a matriz de T na base β . A tal matriz, denotada por $[T]_\beta$, satisfaz

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta [v]_\beta, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Podemos calcular $[T]_\beta$ da seguinte forma:

$$[T] = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta \\ | & & | \end{pmatrix},$$

em que $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Definição. Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear. Dizemos que T é **diagonalizável** se existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T .

Exemplo. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (2x - 3y, -y).$$

A matriz do operador é

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico $p_T(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$.
Daí, seus autovalores são 2 e -1.

Os autovetores associados a 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 2x \\ -y = 2y \end{cases} \sim \begin{cases} -3y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

Portanto, $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(1, 0)\}$.

Associados a -1:

$$\begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -x \\ -y = -y \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \end{cases}$$

Assim, $V_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(1, 1)\}$.

Note que $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, formada por autovetores de T . Isso significa que T é diagonalizável, segundo a nossa definição.
Temos que $\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$$[T]_{\beta} = (P_{\beta \rightarrow \gamma})^{-1} [T]_{\gamma} P_{\beta \rightarrow \gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

Observação. Assuma que β é base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Então

$$[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta} [v]_{\beta}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Denote $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$. Então

$$[v_1]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [v_2]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [v_3]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$[T(v_1)]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1,$$

ou seja, v_1 é autovetor de T associado ao autovetor λ_1 .

O mesmo vale para v_2 :

$$[T(v_2)]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_2) = \lambda_2 v_2$$

Daí v_2 é autovetor associado a λ_2 .

Da mesma forma, v_3 é autovetor associado a λ_3 .

Conclusão: Se B é base tal que $[T]_B$ é uma matriz diagonal, então T é diagonalizável, e B é formado por autovetores de T .

Obs.: O mesmo vale para $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Relembre:

Definição. Sejam A e B matriz quadradas de mesma ordem. Dizemos que A e B são **similares** se existe uma matriz invertível M tal que $M^{-1}AM = B$. Denota-se $A \sim B$.

Relembre também que

Assim, $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diagonalizável se e só se $[T]$ é similar a uma matriz diagonal.

Definição. Seja A uma matriz quadrada. Dizemos que A é **diagonalizável** se A é similar a uma matriz diagonal.

Obs.: A é diagonalizável se e só se existe base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A . Neste caso, se

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1] & \dots & [v_n] \\ | & & | \end{pmatrix},$$

então $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Teorema. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_m$ autovetores associados a autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distintos. Então $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é um conjunto l.i.

Teorema. Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ seus autovalores. Então T é diagonalizável se e só se
$$n = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_m}.$$

Isso ocorre se e só se
mult. geo. $\lambda_i = \text{mult. alg. } \lambda_i, \quad \forall i.$

Consequência. Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear. Se T admite n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

Exemplo. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{11} \\ 0 & 3 & \pi \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são 1, 3 e -5. Ou seja A admite três autovalores distintos, e portanto, A é diagonalizável. Vale que

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Determine se os operadores lineares a seguir são diagonalizáveis, e, em caso positivo, encontre uma base formada por autovetores:

(a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2x + 2y, 2x - y)$

(b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, y)$

Exemplo (em linguagem de matrizes):

Determine se as matrizes a seguir são diagonalizáveis, e em caso positivo, encontre uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) - Polinômio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 \\ = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

Os autovalores são 3 e -2.

- Autovetores associados a 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$
$$\parallel$$
$$\begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3x \\ 2x - y = 3y \end{cases} \sim \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 2y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\therefore V_3 = \{(2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(2, 1)\}.$$

- Autovetores associados a -2:

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y = -2x \\ 2x-y = -2y \end{cases} \sim \begin{cases} 4x+2y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \sim y = -2x$$

$$\therefore V_{-2} = \{(x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(1, -2)\}.$$

Daí, $\{(2, 1), (1, -2)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$ formado por autovetores de A . Então, tomando

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

Vale que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $P^{-1}AP$ é diagonal.

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2)$$

Seu único autovetor é 1 (com mult. alg. é 2). Autoespaço associado é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \quad \parallel \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x \\ y = y \end{cases} \sim \begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Daí } V_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(1, 0)\}.$$

Assim, $\dim V_1 = 1$, ou seja, mult. geo. de 1 é 1 . Daí a matriz A não é diagonalizável.

Obs. Se A e M são matrizes quadradas, e M é invertível, então:

$$(M^{-1}AM)^2 = M^{-1} \overbrace{AM}^I M^{-1}AM = M^{-1}AAM = M^{-1}A^2M$$

$$(M^{-1}AM)^3 = (M^{-1}AM)^2 M^{-1}AM = M^{-1}A^2 \underbrace{MM^{-1}}_I AM = M^{-1}A^3M$$

$$(M^{-1}AM)^k = M^{-1}A^kM$$

Exemplo. Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Calcule:

(a) A^{50}

(b) A^n , em que $n \in \mathbb{N}$.

Seja

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 4 \\ -6 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 5) + 24 = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

- $\mathcal{V}_1$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5x - 4y \\ 6x - 5y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = x \\ 6x - 5y = y \end{cases} \sim \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = y \end{cases}$$

$$\therefore \mathcal{V}_1 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(1, 1)\}.$$

$\mathcal{V}_{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 5x-4y \\ 6x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4y = -x \\ 6x-5y = -y \end{cases} \sim \begin{cases} 6x-4y = 0 \\ 6x-4y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x = 2y \end{cases}$$

$$\therefore \mathcal{V}_{-1} = \{(x, \frac{3}{2}x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(2, 3)\}$$

Seja

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ então } P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dai, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$
$$P^{-1}A^n P$$

Isso significa que

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 2(-1)^{n+1} & -2 + 2(-1)^n \\ 3 + 3(-1)^{n+1} & -2 + 3(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Em particular,

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 3 + 2(-1)^{51} & -2 + 2(-1)^{50} \\ 3 + 3(-1)^{51} & -2 + 3(-1)^{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -2+2 \\ 3-3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$