

4.5.

ex 7. Encontre uma base do

(a) plano $3x - 2y + 5z = 0$

(b) plano $x - y = 0$

(c) reta $x = 2t, y = -t, z = 4t.$

$$(a) \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 5z = 0 \} =$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z \} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{2}{3}y, y, 0 \right) + \left(-\frac{5}{3}z, 0, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \left(\frac{2}{3}, 1, 0 \right) + z \left(-\frac{5}{3}, 0, 1 \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{ger} \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, 0 \right), \left(-\frac{5}{3}, 0, 1 \right) \right\}$$

O conjunto $\left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, 0 \right), \left(-\frac{5}{3}, 0, 1 \right) \right\}$ é l.i. (pois um não é múltiplo do outro).

alternativamente: $(0, 0, 0) = a \left(\frac{2}{3}, 1, 0 \right) + b \left(-\frac{5}{3}, 0, 1 \right) \Rightarrow a = b = 0$
 Isso prova que o conjunto é l.i.

Daí, uma base do plano $3x - 2y + 5z = 0$ é $\left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, 0 \right), \left(-\frac{5}{3}, 0, 1 \right) \right\}.$

(b) O plano é

$$\begin{aligned}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\} \\ &= \{(y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \{(y, y, 0) + (0, 0, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é l.i. (pois não são múltiplos um do outro), e portanto vai ser uma base do plano $x - y = 0$.

(c) A reta é

$$\begin{aligned}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2t, y = -t, z = 4t\} &= \\ &= \{(2t, -t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(2, -1, 4) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{ger} \{(2, -1, 4)\}.\end{aligned}$$

O conjunto $\{(2, -1, 4)\}$ é l.i. (pois constitui de um único vetor não-nulo), e portanto, é base da reta.

4.5.

ex. 8. Encontre a dimensão do subespaço:

(a) $W = \{(a, b, c, 0) \in \mathbb{R}^4\}$

(b) $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid d = a + b, c = a - b\}$.

$$\begin{aligned}(a) \ W &= \{(a, b, c, 0) \in \mathbb{R}^4\} = \{(a, 0, 0, 0) + (0, b, 0, 0) + (0, 0, c, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{ger} \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}\end{aligned}$$

Note que $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ é um subconjunto da

base canônica de $\mathbb{R}^4$ e portanto, é l.i. Daí, o mesmo é base de W . Segue que $\dim W = 3$.

$$\begin{aligned} (b) \quad W &= \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a - b, d = a + b \} \\ &= \{ (a, b, a - b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \{ (a, 0, a, a) + (0, b, -b, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \text{ger} \{ (1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1) \}. \end{aligned}$$

O conjunto $\{ (1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1) \}$ é l.i. (pois são dois elementos e um não é múltiplo do outro), e portanto é base. Daí $\dim W = 2$.

4.6.

ex. 6. Considere as bases de $\mathbb{R}^2$:

$$B = \{ (1, 0), (0, 1) \} \quad \text{e} \quad B' = \{ (2, 1), (-3, 4) \}.$$

- (a) Calcule a matriz mudança de base de B para B' .
 (b) " " " " " " " " B' para B .
 (c) e (d) Se $w = (3, -5)$, calcule $[w]_B$ e $[w]_{B'}$.

$$(b) \quad P_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} | & | \\ [(2, 1)]_B & [(-3, 4)]_B \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad P_{B \rightarrow B'} = (P_{B' \rightarrow B})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad [w]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \text{daí}$$

$$[w]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} [w]_B = \begin{pmatrix} 4/11 & 3/11 \\ -1/11 & 2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/11 \\ -13/11 \end{pmatrix}$$

(d) Vamos calcular $[w]_{B'}$ diretamente:
queremos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(3, -5) = a(2, 1) + b(-3, 4) = (2a - 3b, a + 4b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 3 \\ a + 4b = -5 \end{cases} \sim \begin{cases} a + 4b = -5 \\ -11b = 13 \end{cases}$$

$$\text{Daí } b = -13/11 \text{ e } a = -5 - 4b = -5 - 4(-13/11) = -3/11,$$

Portanto,

$$(3, -5) = (-3/11)(2, 1) + (-13/11)(-3, 4),$$

ou seja,

$$[(3, -5)]_{B'} = \begin{pmatrix} -3/11 \\ -13/11 \end{pmatrix}$$

4.10.

ex. 3. Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2), \quad T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2).$$

(a) $[T_1]$ e $[T_2]$?

(b) $[T_1 \circ T_2]$ e $[T_2 \circ T_1]$?

(c) $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$?

$$(a) [T_1] = \begin{pmatrix} | & | \\ [T_1(\frac{1}{1}, 0)] & [T_1(0, 1)] \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [T_2] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad [T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad T_1(T_2(x, y)) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 4y \\ x - 4y \end{pmatrix}$$

$$T_2(T_1(x, y)) = (3x + 3y, 6x - 2y).$$

5.1.

Ex. 1-2: Verifique que o vetor X é autovetor da matriz A , e determine o autovalor associado:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 2+6+2 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Então $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor de A , associado ao autovalor 5.

$$2. \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1-1 \\ -1+2-1 \\ -1-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor de A associado ao autovalor 0.

5.1

ex. 6-8. Calcule o polinômio característico, autovalores e os respectivos autoespaços:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-1)^2 + 2(\lambda-1) = (\lambda-4)(\lambda-1) + 2)(\lambda-1)$$

$$= (\lambda^2 - 5\lambda + 6)(\lambda-1) = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1).$$

Os autovalores de A são 1, 2 e 3.

Os autovetores associados a 1 são:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 4x + z \\ -2x + y \\ -2x + z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + z = x \\ -2x + y = y \\ -2x + z = z \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + z = 0 \\ -2x = 0 \\ -2x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto, o autoespaço associado ao autovalor 1 é

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\} = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{ger} \{(0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Autovetores associados a 2:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \parallel &\qquad \parallel \\ \begin{pmatrix} 4x + z \\ -2x + y \\ -2x + z \end{pmatrix} &\qquad \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + z = 2x \\ -2x + y = 2y \\ -2x + z = 2z \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -2x - y = 0 \\ -2x - z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Então, associado ao autovalor 2, temos o autoespaço

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = -y + z = 0\} = \\ &= \{(-z/2, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1/2, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{ger} \{(-1/2, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

O autoespaço associado a 3 é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 4x + z \\ -2x + y \\ -2x + z \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + z = 3x \\ -2x + y = 3y \\ -2x + z = 3z \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Da

$$\mathcal{V}_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \text{ e } y - z = 0 \}$$

$$= \{ (-z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \} = \text{ger } \{ (-1, 1, 1) \}.$$

Verificando:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ 2+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.1

ex. 9-11 Calcule o polinômio característico, autovalores e os respectivos autoespaços:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-1) \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-1) (\lambda^2 (\lambda+2) - 2 - \lambda) = (\lambda-1) (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2)$$

Por inspeção, 1 é raiz de $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2$.

Portanto,

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 \quad \begin{array}{l} \lambda^2 \\ 3\lambda^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda-1 \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{array}$$

$$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda-1)^2 (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Os autovalores de A são 1, -1 e -2.

Autoespaço associado a -2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} 2z \\ x+z \\ y-2z \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \\ -2w \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = -2x \\ x+z = -2y \\ y-2z = -2z \\ 0 \\ w = -2w \end{cases} \sim \begin{cases} x+z=0 \\ x+2y+z=0 \\ y=0 \\ w=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ w=0 \end{cases}$$

$$\text{Dar } \mathcal{V}_{-2} = \{(x, 0, z, 0) \mid x+z=0\} = \{(-z, 0, z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ = \text{ger} \{(-1, 0, 1, 0)\}$$

Os autovalores associados a -1 são:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} 2z \\ x+z \\ y-2z \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -w \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = -x \\ x+z = -y \\ y-2z = -z \\ w = -w \end{cases} \sim \begin{cases} x+2z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ y-z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2z = 0 \\ y-z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Portanto, $\mathcal{N}_1 = \{(-2z, z, z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(-2, 1, 1, 0)\}$.

Por fim, calculando $\mathcal{N}_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} 2z \\ x+z \\ y-2z \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = x \\ x+z = y \\ y-2z = z \\ w = w \end{cases} \sim \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(2z, 3z, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{z(2, 3, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1) \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{ger} \{(2, 3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Verificando:

(note que $\dim V_1 = 2$)

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2$ e $\lambda = -1$: verifiquem