

Autovalor e autovetor

Definição. Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear.

Sejam $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$.

Então dizemos que λ é um **autovalor** de T , e v é um **autovetor** de T associado a λ .

Exemplos.

1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, -y)$.
Então

$$T(1, 0) = (1, 0) = 1 \cdot (1, 0)$$

$$T(0, 1) = (0, -1) = -1 \cdot (0, 1)$$

Portanto, 1 e -1 são autovalores de T , e $(1, 0)$ é autovetor associado a 1, e $(0, 1)$ autovetor associado a -1.

2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T] = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Então:

$$T(1, 0, 0) = (\sqrt{7}, 0, 0) = \sqrt{7}(1, 0, 0)$$

$$T(0, 1, 0) = (0, -2, 0) = -2(0, 1, 0)$$

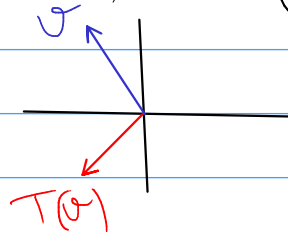
$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 3) = 3(0, 0, 1)$$

Dai $\sqrt{7}$, -2 e 3 são autovalores de T .

3. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação por $\pi/2$, ou seja,

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, por construção, T não admite autovetor e autovalor real.



Definição. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovvalor de $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Define-se o **autoespaço** de T associado a λ por

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = \lambda v\}$$

Note que, se $v_1, v_2 \in V_\lambda$ e $\mu \in \mathbb{R}$, então:

$$(i) \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda (v_1 + v_2) \\ \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\lambda.$$

$$(ii) \quad T(\mu v_1) = \mu T(v_1) = \mu \lambda v_1 = \lambda (\mu v_1) \\ \Rightarrow \mu v_1 \in V_\lambda.$$

$\therefore V_\lambda$ é subespaço vetorial.

Definição. Seja M uma matriz quadrada de ordem n . Um autovvalor de M é um autovvalor de T_M .
Equivalentemente, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovvalor** de M se existe uma matriz coluna X não nula tal que
$$MX = \lambda X.$$

Agora veremos como calcular autovvalores de uma matriz:

Seja M matriz $n \times n$. Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma matriz coluna X não nula tais que
$$MX = \lambda X.$$

Isso significa que $(\lambda I - M)X = 0$. Ou seja, queremos que

$$(\lambda I - M)X = 0$$

admita solução não trivial. Isso ocorre se e só se
$$\det(\lambda I - M) = 0.$$

Definição. O polinômio $p_M(\lambda) = \det(\lambda I - M)$ é denominado de **polinômio característico** de M .

Assim, do discutido acima, o conjunto de autovalores de M coincide com o conjunto das raízes de seu polinômio característico.

Exemplo. 4. Seja

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= \det(\lambda I - M) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - \sqrt{7})(\lambda + 2)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Dai, os únicos autovalores de M são $\sqrt{7}$, -2 e 3 .

5. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seu pol. característico é

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det(\lambda I - [T]) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1, \end{aligned}$$

que não admite raiz real. Portanto, T não admite autovalor real.

6. Determine os autovalores e autovetores de $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
dado por $T(x, y) = (x + 2y, -2y)$.

Temos que

$$[T] = \begin{pmatrix} [T(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})] & [T(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix})] \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Os autovalores de T são 1 e -2 .

Para calcular os autovetores associados a 1 , queremos encontrar os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$T(x, y) = 1 \cdot (x, y)$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ (x+2y, -2y) & (x, y) \end{matrix}$$

Ou seja, queremos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} x + 2y = x \\ -2y = y \end{cases} \sim \begin{cases} 2y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \sim y = 0$$

Portanto,

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(1, 0)\}.$$

Calculando o autoespaço associado a -2 :

$$(x + 2y, -2y) \stackrel{T(x, y)}{=} -2 \cdot (x, y) = (-2x, -2y)$$

Dai, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} x+2y = -2x \\ -2y = -2y \end{cases} \sim \begin{cases} 3x+2y=0 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{-2} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y=0\} = \{(-\frac{2}{3}y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{y(-\frac{2}{3}, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{ger}\{(-\frac{2}{3}, 1)\}. \end{aligned}$$

Rascunho: verificando:

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,0) = 1 \cdot (1,0) \\ T(-\frac{2}{3}, 1) &= (-\frac{2}{3}+2, -2) = (\frac{4}{3}, -2) = \\ &= -2 \cdot (-\frac{2}{3}, 1) \end{aligned}$$

Observações.

(a) $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui no máximo n raízes.

(b) Seja λ um autovetor de T . A multiplicidade algébrica de λ é a multiplicidade da raiz λ do polinômio característico de T .

A multiplicidade geométrica de λ é $\dim \mathcal{N}_\lambda$.

Teorema. Seja λ um autovetor de $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então
 $1 \leq \text{mult. geo. } \lambda \leq \text{mult. alg. } \lambda$.

Exemplo.

7. Vamos determinar os autovalores e autovetores de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

O pol. característico é

$$P_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & -4 \\ 0 & \lambda - 3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 2).$$

Os autovalores são 3 (com mult. algébrica 2), e 2 (com mult. alg. 1).

Calculando os autospaços:

$-\lambda = 3$:

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 4z \\ 3y + z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4z = 3x \\ 3y + z = 3y \\ 2z = 3z \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} 4z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{array} \right. \sim \left\{ z = 0 \right.$$

Daí

$$\mathcal{V}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \\ = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Assim $\dim \mathcal{V}_3 = 2$, ou seja, a mult. geométrica de 3 é 2.

- $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

" " "

$$\begin{pmatrix} 3x+4z \\ 3y+z \\ 2z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x & 4z = 2x \\ & 3y+z = 2y \\ & 2z = 2z \end{cases} \sim \begin{cases} x & +4z = 0 \\ & y+z = 0 \end{cases}$$

Daí

$$\mathcal{V}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+4z = y+z = 0\} = \\ = \{(-4z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-4, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{ger} \{(-4, -1, 1)\}.$$

O conjunto $\{(-4, -1, 1)\}$ é l.i. (pois contém um único elem. não nulo), e portanto é base de $\mathcal{V}_2$. Daí $\dim \mathcal{V}_2 = 1$.

Portanto, mult. geométrica de 2 é 1.

8. Seja

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

uma matriz triangular superior. Então:

I) os autovalores de M são $a_1, a_2, \dots, a_n$,

II) o pol. característico é

$$p_M(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \dots (\lambda - a_n).$$

(exercício: verifique)

9. Vamos determinar os autovalores, as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica, e os respectivos autoespaços da matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Do exemplo 8, vale que seu pol. característico:

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2).$$

Os autovalores são 3 (com mult. alg. 2), e 2 (com mult. alg. 1).

O autoespaço associado a 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + y + 4z \\ 3y + z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 4z = 3x \\ 3y + z = 3y \\ 2z = 3z \end{cases} \sim \begin{cases} y + 4z = 0 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Daí

$$\mathcal{V}_3 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(1, 0, 0)\}.$$

Assim, $\dim \mathcal{V}_3 = 1$, e portanto, a mult. geométrica de $\lambda = 3$ é 1.

Autoespaço associado a 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x + y + 4z \\ 3y + z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 4z = 2x \\ 3y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \mathcal{V}_2 = \{(-3z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{ger } \{(-3, -1, 1)\}.$$

Daí $\dim \mathcal{V}_2 = 1$. Daí a mult. geo. de 2 é 1.