Transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

Vamos estudar uma classe boa de funções entre espaços vetoriais, começando com $\mathbb{R}^n$.

Uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pode ser representado da seguinte forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

em que cada f_i é uma função $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y) = (2x+y,\ 0,\ x^2+xy).$$

Então $f_1(x,y) = 2x+y$, $f_2(x,y) = 0$, $f_3(x,y) = x^2+xy$.

Estamos interessados no caso em que cada $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é linear, ou seja,

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n.$$

Neste caso, chamamos f de transformação linear. Então, temos que representamos f assim:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \dots, \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n).$$

Outra forma é a seguinte: se $(w_1, w_2, \dots, w_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, então

$$\begin{aligned}
w_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\
w_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\
&\ \vdots \\
w_m &= \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n
\end{aligned}$$

Uma outra forma de representar f é:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A matriz $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ é denominado a matriz da transformação linear. Denota-se por $[f] = A$. Então, podemos representar f da forma compacta:

$$f(X) = AX, \qquad X \in \mathbb{R}^n.$$

Ou, simplesmente

$$f(v) = [f][v], \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Reciprocamente, se B é uma matriz $m \times n$, então definimos

$$T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

por $T_B(X) = BX$, $X \in \mathbb{R}^n$. Temos que T_B é uma transformação linear.

Exemplos.

1. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y,z) = (2x - y, 5x - 7y + 11z).$$

Note que podemos escrever

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$T(1,0,0) = (2,5)$
$T(0,1,0) = (-1,-7)$
$T(0,0,1) = (0, 11)$

Daí

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. A transformação nula é $T_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(v) = 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. T_0 é uma transformação linear, e $[T_0]$ é a matriz nula $m \times n$.

Nomenclatura. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é denominada de operador linear.

3. O operador identidade é $T_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que
$$T_I(v) = v, \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$
A matriz do operador linear é a matriz identidade I.

4. (contração ou expansão uniforme).
Seja $\alpha > 0$, e defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via
$$T(v) = \alpha v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$
Então T leva v num múltiplo de v, para cada v. A norma de Tv será maior do que de v, se $\alpha > 1$, e será menor se $\alpha < 1$. Se $\alpha = 1$ então T é o operador identidade.
Note que
$$T(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

5. (reflexão em torno do eixo x).
Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(x,y) = (x,-y)$. Então T é linear, e
$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. (reflexão em torno da origem).
Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via $T(x,y) = (-x,-y)$. Então podemos descrever
$$T(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

7. (Rotação em torno da origem). A rotação de um vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ em torno da origem, no sentido anti-horário, por um ângulo θ é dado pelo produto

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

(Atenção. θ é um número fixo!)

Daí, a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é visto como a rotação pelo ângulo θ.

Teorema. Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então:

(i) $T(v+w) = T(v) + T(w)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

(iii) $T(0) = 0$.

Demonstração. Temos que $T(v) = [T][v]$. Então seguem das propriedades de multiplicação de matrizes. $\square$

Teorema. Denote por $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se A é matriz $m \times n$. Então:

(i) $T_A = T_B$ se e só se $A = B$.

(ii) $T_B \circ T_A = T_{BA}$, em que A é $m\times n$ e B é $l \times m$.

(iii) T_A é invertível $\iff$ A é invertível.

Dem.: (ii) Dado $v \in \mathbb{R}^n$, então

$$T_B \circ T_A(v) = T_B(T_A(v)) = T_B(A[v]) = BA[v] = T_{BA}(v).$$

De (i), segue que $T_B \circ T_A = T_{BA}$. $\square$

(i) e (iii): exercício.

Vamos mostrar uma maneira de exibir a matriz de uma transformação linear.

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então

$$[T] = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(e_1)] & [T(e_2)] & \cdots & [T(e_n)] \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Por fim, considere o seguinte problema: seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear e β uma base de $\mathbb{R}^n$. Dado as coordenadas de $v \in \mathbb{R}^n$ na base β, como se calcula $[T(v)]_\beta$?

Seja γ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então, perceba que

$$P_{\gamma\to\beta}[T]P_{\beta\to\gamma}[v]_\beta = P_{\gamma\to\beta}[T][v] = P_{\gamma\to\beta}[T(v)]$$
$$= [T(v)]_\beta.$$

A matriz $P_{\gamma\to\beta}[T]P_{\beta\to\gamma}$ é denotada por $[T]_\beta$, e é denominada de matriz de T em relação à base β.

Então, vale o seguinte

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta [v]_\beta.$$

Seja $M = P_{\gamma\to\beta}$. Então $P_{\beta\to\gamma} = (P_{\gamma\to\beta})^{-1} = M^{-1}$. Daí

$$[T]_\beta = M[T]M^{-1},$$

ou seja $[T]_\beta$ é semelhante a $[T]$.