Dimensão e Mudança de base

Costumamos chamar a reta $\mathbb{R}^1$ de unidimensional, o plano $\mathbb{R}^2$ de bidimensional, e o espaço $\mathbb{R}^3$ de tridimensional. Podemos estender o conceito para espaços vetoriais arbitrários usando-se uma base do espaço.

Teorema.
(a) Assuma que $ger\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = V$. Então existe um subconjunto de $\{v_1, \dots, v_m\}$ que é base de V.
(b) Se $\{w_1, \dots, w_s\}$ é l.i., então podemos completar o conjunto de forma a obter uma base de V.

Teorema. Seja V um espaço vetorial com base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Então:
(a) qualquer conjunto com mais de n vetores é l.d.
(b) um conjunto l.i. com exatamente n vetores é uma base de V.

Consequência. Qualquer duas bases de um mesmo espaço vetorial V admite o mesmo número de elementos.

Definição. Definimos a dimensão de um espaço vetorial V como sendo o número de elementos de uma base de V.

Exemplos.
(i) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$
(ii) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$
(iii) $\dim \mathbb{R}^n = n$
(iv) $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$
(v) $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$ (exercício).

Será conveniente denotarmos o vetor de coordenadas por uma matriz coluna. Então, dado uma base β de um esp. vet. V e $v \in V$, se $(v)_\beta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, então denotamos

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Problema: dado duas bases β e β' de um mesmo esp. vet. V, como se relaciona $[v]_\beta$ e $[v]_{\beta'}$?

Assuma que $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\beta' = \{v_1', \dots, v_n'\}$, e

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar $[v]_{\beta'}$.

Sabemos que $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$.
Vamos escrever cada v_i como comb. linear dos elementos de β':

$$v_i = \alpha_{1i} v_1' + \alpha_{2i} v_2' + \dots + \alpha_{ni} v_n'.$$

Daí

$$\begin{aligned} v = {} & x_1(\alpha_{11} v_1' + \alpha_{21} v_2' + \dots + \alpha_{n1} v_n') + \\ & + x_2(\alpha_{12} v_1' + \alpha_{22} v_2' + \dots + \alpha_{n2} v_n') + \dots + \\ & + x_n(\alpha_{1n} v_1' + \alpha_{2n} v_2' + \dots + \alpha_{nn} v_n') \\ = {} & (x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \dots + x_n\alpha_{1n}) v_1' + \\ & + (x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22} + \dots + x_n\alpha_{2n}) v_2' + \dots + \\ & + (x_1\alpha_{n1} + x_2\alpha_{n2} + \dots + x_n\alpha_{nn}) v_n' \end{aligned}$$

$$[v_1]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}$$

Denomine

$$P_{\beta \to \beta'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_{\beta'} & \cdots & [v_n]_{\beta'} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Perceba que

$$[v]_{\beta'} = P_{\beta \to \beta'} [v]_\beta$$

A matriz $P_{\beta \to \beta'}$ é denominada de matriz mudança de base de β para β'.

Exemplo. No espaço $\mathbb{R}^2$, vamos calcular a matriz mudança de base da base canônica $\gamma = \{(1,0),(0,1)\}$ para a base $\beta = \{(1,1),(1,0)\}$.

$P_{\gamma \to \beta}$.

Temos que determinar $[(1,0)]_\beta$ e $[(0,1)]_\beta$.

Queremos encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,1) = a(1,1) + b(1,0) = (a+b, a),$$

$$\therefore \begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Daí

$$[(0,1)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Temos também que $(1,0) = 0 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,0)$. Daí

$$[(1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$P_{\gamma\to\beta} = \begin{pmatrix} | & | \\ [(1,0)]_\beta & [(0,1)]_\beta \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, por exemplo, se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, então

$$[(a,b)]_\gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Daí

$$[(a,b)]_\beta = P_{\gamma\to\beta}[(a,b)]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b \end{pmatrix}.$$

Isso significa que

$$(a,b) = b(1,1) + (a-b)(1,0).$$

$[v]_\gamma = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\qquad [v]_\beta = ?$ $\qquad [(1,0)]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad [(0,1)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} v = (a,b) &= a(1,0) + b(0,1) \\ &= a\big(0\cdot(1,1) + 1(1,0)\big) + b\big(1\cdot(1,1) + (-1)(1,0)\big) \\ &= (a\cdot 0 + b\cdot 1)(1,1) + (a\cdot 1 + b(-1))(1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [v]_\beta = \begin{pmatrix} a\cdot 0 + b\cdot 1 \\ a\cdot 1 + b(-1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | \\ [(1,0)]_\beta & [(0,1)]_\beta \\ | & | \end{pmatrix}[v]_\gamma \\ &= P_{\gamma\to\beta}[v]_\gamma \end{aligned}$$

Por exemplo,
$$[(5,7)]_\beta = P_{\gamma\to\beta}[(5,7)]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix},$$
$$\iff (5,7) = 7(1,1) + (-2)\cdot(1,0)$$

Sejam β e β' bases de V. Então, $\forall v \in V$,
$$P_{\beta'\to\beta}P_{\beta\to\beta'}[v]_\beta = P_{\beta'\to\beta}[v]_{\beta'} = [v]_\beta, \ \forall v \in V.$$
Portanto, $P_{\beta'\to\beta}P_{\beta\to\beta'} = I$. Assim, ambas são invertíveis e vale que
$$P_{\beta'\to\beta} = \left(P_{\beta\to\beta'}\right)^{-1}.$$

Exemplo. Considere novamente $\gamma = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(1,0)\}$.
Vamos calcular $P_{\beta\to\gamma}$:
$$P_{\beta\to\gamma} = \begin{pmatrix} | & | \\ [(1,1)]_\gamma & [(1,0)]_\gamma \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí
$$P_{\gamma\to\beta} = \left(P_{\beta\to\gamma}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos também a seguinte propriedade: sejam β, β' e β'' bases de V. Então
$$P_{\beta'\to\beta''}P_{\beta\to\beta'}[v]_\beta = P_{\beta'\to\beta''}[v]_{\beta'} = [v]_{\beta''} = P_{\beta\to\beta''}[v]_\beta, \ \forall v \in V$$
Segue que $P_{\beta'\to\beta''}P_{\beta\to\beta'} = P_{\beta\to\beta''}$.

Exemplo. Existe uma forma prática de calcular $P_{\beta \to \beta'}$ em que β e β' são bases de $\mathbb{R}^n$.

Denote por γ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então é fácil descrever $P_{\beta \to \gamma}$ e $P_{\beta' \to \gamma}$ (basta escrever os elementos de β e β', respectivamente, como matrizes colunas). Escreva

$$\left[P_{\beta' \to \gamma} \mid P_{\beta \to \gamma} \right],$$

e escalone. Obteremos

$$\left[I \mid A \right],$$

em que

$$A = (P_{\beta' \to \gamma})^{-1} P_{\beta \to \gamma} = P_{\gamma \to \beta'} P_{\beta \to \gamma} = P_{\beta \to \beta'}.$$

Portanto

$$\left[P_{\beta' \to \gamma} \mid P_{\beta \to \gamma} \right] \sim \left[I \mid P_{\beta \to \beta'} \right]$$