Conjunto de exercícios 4.1

Nos Exercícios **3–12**, determine se o conjunto equipado com as operações dadas é um espaço vetorial. Para os que não são espaços vetoriais, identifique os axiomas que falham.

4. O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(x, 0)$ com as operações padrão de R^2.

5. O conjunto de todos os pares de números reais da forma (x, y), em que $x \geq 0$, com as operações padrão de R^2.

4. Consideramos o conjunto $V = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

com operações:

$$V \times V \longrightarrow V \qquad \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$((x_1,0),(x_2,0)) \longmapsto (x_1+x_2,0) \qquad (\lambda,(x,0)) \longmapsto (\lambda x, 0)$$

Vamos verificar os 8 axiomas:

(i) $(x_1,0)+(x_2,0) = (x_1+x_2,0) = (x_2+x_1,0) = (x_2,0)+(x_1,0)$

(ii) Verificar que

$$((x_1,0)+(x_2,0))+(x_3,0) = (x_1,0)+((x_2,0)+(x_3,0))$$

De fato:

$$((x_1,0)+(x_2,0))+(x_3,0) = (x_1+x_2,0)+(x_3,0) = ((x_1+x_2)+x_3,0)$$

$$\|$$

$$(x_1,0)+((x_2,0)+(x_3,0)) = (x_1,0)+(x_2+x_3,0) = (x_1+(x_2+x_3),0)$$

(iii) Defina $\mathbf{0} = (0,0)$. Vale que

$$(x,0)+\mathbf{0} = (x+0,0) = (x,0).$$

(iv) Dado $(x,0) \in V$, temos que $(-x,0) \in V$ e

$$(x,0)+(-x,0) = (x-x,0) = (0,0) = \mathbf{0}.$$

(v) $1\cdot(x,0) = (1\cdot x, 0) = (x,0)$

(vi) $\lambda\cdot(\mu\cdot(x,0)) = \lambda\cdot(\mu x, 0) = (\lambda(\mu x), 0)$

$\qquad (\lambda\mu)\cdot(x,0) = ((\lambda\mu)x, 0)$ $=$

(vii) $(\lambda+\mu)\cdot(x,0) = ((\lambda+\mu)x, 0)$ $=$

$\qquad \lambda\cdot(x,0) + \mu(x,0) = (\lambda x, 0) + (\mu x, 0) = (\lambda x + \mu x, 0)$

(viii) $\lambda\cdot((x_1,0)+(x_2,0)) = \lambda\cdot(x_1+x_2, 0) = (\lambda(x_1+x_2), 0)$

$\qquad \lambda\cdot(x_1,0) + \lambda\cdot(x_2,0) = (\lambda x_1, 0) + (\lambda x_2, 0) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, 0)$

Daí V, com as operações, é um esp. vetorial.

5. Não é esp. vetorial, pois não satisfaz o axioma 4.
De fato, $(2,0)$ está no conjunto, mas não existe (x,y) no conjunto tal que $(2,0)+(x,y) = 0$, pois necessariamente (x,y) deveria ser $(-2,0)$, que não está no conjunto.

Conjunto de exercícios 4.2

1. Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de R^3.
   (a) Todos os vetores da forma $(a, 0, 0)$.
   (b) Todos os vetores da forma $(a, 1, 1)$.
   (c) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c$.
   (d) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c + 1$.
   (e) Todos os vetores da forma $(a, b, 0)$.

1(a) Seja $S = \{(a,0,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(i) $(0,0,0) \in S$

(ii) Dados $(a,0,0), (b,0,0) \in S$, temos que
$$(a,0,0) + (b,0,0) = (a+b,0,0) \in S$$

(iii) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\lambda \cdot (a,0,0) = (\lambda a, 0, 0) \in S.$$
Assim, S é subesp. vet. de $\mathbb{R}^3$.

(b) Seja $S = \{(a,1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Como $(0,0,0) \notin S$, segue que S não é subesp. vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(c) Seja $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = a + c\}$.

(i) Como $0 = 0 + 0$, segue que $(0,0,0) \in S$.

(ii) Dados $(a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) \in S$, vale que
$$b_1 = a_1 + c_1 \quad \text{e} \quad b_2 = a_2 + c_2.$$
Daí
$$(a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2).$$

Mas
$$b_1 + b_2 = a_1 + c_1 + a_2 + c_2 = (a_1+a_2) + (c_1+c_2).$$

Assim, $(a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) \in S$.

(iii) $\lambda(a,b,c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, mas
$$\lambda b = \lambda(a+c) = \lambda a + \lambda c.$$
Daí $\lambda(a,b,c) \in S$.
Portanto, S é subesp. vet. de $\mathbb{R}^3$.

(d) $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = a + c + 1\}$.

Não é subesp. vetorial, pois $(0,0,0) \notin S$.

(e) vai ser subespaço (verifique).

2.(g) Seja B de tamanho $n \times n$ fixada, e seja

$$S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

(i) Temos que

$$0 \cdot B = 0 = B \cdot 0 = 0,$$

ou seja, $0 \in S$.

(ii) Sejam $A_1, A_2 \in S$. Então $A_1 B = B A_1$ e $A_2 B = B A_2$. Daí

$$(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B = BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2),$$

ou seja, $A_1 + A_2 \in S$.

(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in S$. Então $AB = BA$. Daí

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda(BA) = B(\lambda A).$$

Assim, $\lambda A \in S$.

Segue que S é um subesp. vetorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

7. Quais dos seguintes são combinações lineares de $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$?

(a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$

(c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

Uma comb. linear de $u = (0,-2,2)$ e $v = (1,3,-1)$ é da forma

$$a(0,-2,2) + b(1,3,-1) = (b, -2a+3b, 2a-b).$$

Queremos então resolver os sistemas lineares:

$$\begin{cases} b = 2 \\ -2a+3b = 2 \\ 2a-b = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = 3 \\ -2a+3b = 1 \\ 2a-b = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = 0 \\ -2a+3b = 4 \\ 2a-b = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3' = L_3 + L_1}{\overset{L_2' = L_2 + L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Assim:

$$(2,2,2) = 2u + 2v$$
$$(3,1,5) = 4u + 3v$$
$$(0,0,0) = 0u + 0v$$

$(0,4,5)$ não é comb. linear de u e v.

11. Em cada parte, determine se os vetores dados geram R^3.

(a) $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$

Dados $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, queremos saber se existem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(2,2,2) + b(0,0,3) + c(0,1,1)$$
$$= (2a, 2a, 2a) + (0,0,3b) + (0,c,c)$$
$$= (2a,\ 2a+c,\ 2a+3b+c).$$

Ou seja, queremos saber se o sistema tem soluções em a, b e c

$$\begin{cases} 2a = x \\ 2a + c = y \\ 2a + 3b + c = z \end{cases}$$

Via escalonamento

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 2 & 3 & 1 & z \end{array}\right) \underset{L_3' = L_3 - L_1}{\overset{L_2' = L_2 - L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y-x \\ 0 & 3 & 1 & z-x \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{L_1' = \frac{1}{2}L_1}{\overset{L_3' = L_3 - L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x/2 \\ 0 & 0 & 1 & y-x \\ 0 & 3 & 0 & z-y \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x/2 \\ 0 & 1 & 0 & (z-y)/3 \\ 0 & 0 & 1 & y-x \end{array}\right)$$

Daí

$$(x,y,z) = \frac{x}{2}(2,2,2) + \left(\frac{z-y}{3}\right)(0,0,3) + (y-x)(0,1,1)$$

Daí esses três vetores geram $\mathbb{R}^3$.

Equivalentemente, o sistema

$$\begin{cases} 2a \qquad\qquad = x \\ 2a + \qquad c = y \\ 2a + 3b + c = z \end{cases}$$

tem sempre solução p/ qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se e só se

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

11.(e). $v_1 = (3,1,4)$, $v_2 = (2,-3,5)$, $v_3 = (5,-2,9)$, $v_4 = (1,4,-1)$.

Dados $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, queremos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = a(3,1,4) + b(2,-3,5) + c(5,-2,9) + d(1,4,-1)$$

$$= (3a + 2b + 5c + d,\ a - 3b - 2c + 4d,\ 4a + 5b + 9c - d).$$

Então:

$$\begin{cases} 3a + 2b + 5c + d = x \\ a - 3b - 2c + 4d = y \\ 4a + 5b + 9c - d = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & y \\ 3 & 2 & 5 & 1 & x \\ 4 & 5 & 9 & -1 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & y \\ 0 & 11 & 11 & -11 & x-3y \\ 0 & 17 & 17 & -17 & z-4y \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & y \\ 0 & 1 & 1 & -1 & (x-3y)/11 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & (z-4y)/17 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & y \\ 0 & 1 & 1 & -1 & (x-3y)/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (z-4y)/17 - (x-3y)/11 \end{array}\right)$$

Portanto, os quatro vetores não geram $\mathbb{R}^3$, pois o sistema não tem solução para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Conjunto de exercícios 4.3

3. (e) É um conjunto l.d?

$\{(0,3,-3,-6), (-2,0,0,-6), (0,-4,-2,-2), (0,-8,4,-4)\}$.

$0 = a(0,3,-3,-6) + b(-2,0,0,-6) + c(0,-4,-2,-2) + d(0,-8,4,-4)$

$= (-2b, 3a-4c-8d, -3a-2c+4d, -6a-6b-2c-4d)$

Temos que verificar se existe solução não trivial de

$$\begin{cases} -2b = 0 \\ 3a - 4c - 8d = 0 \\ -3a - 2c + 4d = 0 \\ -6a - 6b - 2c - 4d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 8 \\ -3 & 0 & -2 & 4 \\ -6 & -6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3' = L_3 + L_2 \\ L_4' = 2L_3 + L_4 - 3L_1}}{\overset{L_1' = -\frac{1}{2}L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -10 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O sistema está escalonado, portanto a sol. do sistema é única.

Daí o conj. é l.i.

Conjunto de exercícios 4.4

2. Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de R^2?

(a) $\{(2, 1), (3, 0)\}$ (b) $\{(4, 1), (-7, -8)\}$

(c) $\{(0, 0), (1, 3)\}$ (d) $\{(3, 9), (-4, -12)\}$

(c) Não é base, pois $\{(0,0),(1,3)\}$ é l.d.

(a) Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$(x,y) = a(2,1) + b(3,0) = (2a+3b, a).$$

Então

$$\begin{cases} 2a + 3b = x \\ a = y \end{cases} \sim \begin{cases} a = y \\ 3b = x - 2y \end{cases}$$

O sistema possui solução única.

Portanto:

(i) $\{(2,1),(3,0)\}$ gera $\mathbb{R}^2$, e

(ii) quando $(x,y) = (0,0)$, conclui-se que $\{(2,1),(3,0)\}$ é l.i.

Então $\{(2,1),(3,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

7. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de **w** em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R^2.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$; $\mathbf{w} = (a, b)$

(a) $(3,-7) = 3(1,0) + (-7)(0,1) \Rightarrow (w)_S = (3,-7)$.

(b) $(1,1) = a(2,-4) + b(3,8) = (2a+3b, -4a+8b)$.

Então

$$\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ -4a + 8b = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ 14b = 3 \end{cases}$$

Daí

$$b = 3/14 \quad e \quad a = \frac{1-3b}{2} = \frac{1 - 9/14}{2} = 5/28$$

Então

$$(1,1) = \frac{5}{28}(2,-4) + \frac{3}{14}(3,8).$$

Segue que

$$(1,1)_S = (5/28, 3/14).$$

(c) $(a,b) = \alpha(1,1) + \beta(0,2) = (\alpha, \alpha + 2\beta)$.

Então o sistema em α e β:

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \alpha + 2\beta = b \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha = a \\ 2\beta = b - a \end{cases}$$

Daí

$$\alpha = a \quad e \quad \beta = \frac{b-a}{2}.$$ Então

$$(a,b) = a(1,1) + \left(\frac{b-a}{2}\right)(0,2).$$

Então

$$(a,b)_S = \left(a, \frac{b-a}{2}\right).$$