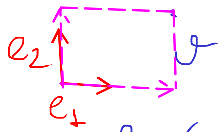
$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$



$v = (\alpha, \beta)$

Dependência linear e Base

Definição. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$. Dizemos que:

(i) $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é linearmente dependente (l.d.) se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0.$$

(ii) $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente (ou l.i.) se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

Observação. Considere a equação em $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0.$$

Então $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é l.i. se o (sistema de) equações acima admitir somente a solução trivial, e é l.d. caso contrário.

$(1,1) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1)$

Exemplos.

1. Em $\mathbb{R}^2$, considere o conjunto $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$. Considere

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) + \alpha_3(1,1) = (0,0),$$

ou seja,

$$(0,0) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3).$$

Então, obtemos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Note que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = -1$ é solução não trivial. Portanto, $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ é l.d.

$$1(1,0) + 1\cdot(0,1) + (-1)(1,1) = (0,0).$$

2. O conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ em $\mathbb{R}^2$ é l.i. De fato, assuma que

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0).$$

Então

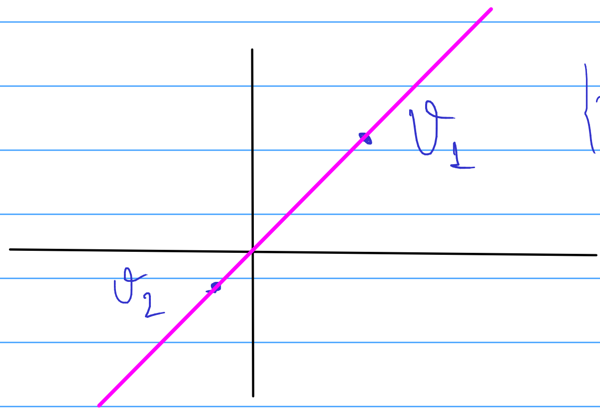
$$(0,0) = (\alpha_1,0) + (0,\alpha_2) = (\alpha_1,\alpha_2).$$

Daí

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Portanto $\{(1,0),(0,1)\}$ é l.i.

3. No plano $\mathbb{R}^2$, $\{v_1,v_2\}$ é um conjunto l.d. se e só se v_1 e v_2 estão numa mesma reta passando pela origem.



$\{v_1,v_2\}$ é l.d.

4. No espaço $\mathbb{R}^3$, $\{v_1,v_2,v_3\}$ é l.d. se e só se v_1, v_2 e v_3 estão num mesmo plano passando pela origem.

5. O conjunto $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é l.i.. De fato,

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,0,0) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1) + (\alpha_2,\alpha_2,0) + (\alpha_3,0,0)$$
$$= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1).$$

Então,

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Daí $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Daí $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é l.i.

Teorema. Um conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é l.d. se, e só se, um dos elementos é combinação linear dos demais.

Definição. Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é dito ser base de V se:

(a) β é l.i.,

(b) β gera V (relembre: $V = \text{ger}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$).

Exemplos.

6. $\{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

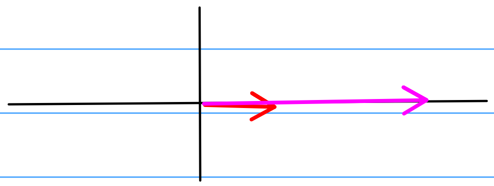
Mais geralmente, sejam

$e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n=(0,\dots,0,1)$.

Então $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$ (exercício: verifique).

Essa base é denominada base canônica de $\mathbb{R}^n$.

7. $\{(1,0),(3,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$.



$-3(1,0)+1.(3,0)=(0,0)$

De fato, esse conjunto não é l.i.

8. $\{(0,1),(3,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$ (verifique).

9. $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é l.i., mas não é base de $\mathbb{R}^3$.

De fato, $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ não gera $\mathbb{R}^3$, pois, por exemplo, $(0,0,1)$ não é comb. linear de $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

10. Considere o conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2. Então

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (verifique).

gera $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pois:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e se

$$\underbrace{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Teorema. Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. Então para cada $v \in V$, existem únicos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Dem (ideia). Assuma que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n.$$

Então

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

Porém, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é l.i. Isso implica que

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0.$$

Ou seja

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n. \qquad \square$$

Definição. Fixada uma base (ordenada) $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, os únicos coeficientes tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

são denominadas coordenadas de v. Denota-se

$$(v)_\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Exemplos.

11. Seja $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então, dado $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Segue

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\beta = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Conclusão: as coordenadas de $v \in \mathbb{R}^n$ na base canônica coincide com v.

12. Seja

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Então

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\beta = (a, b, c, d).$$

Por exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & \sqrt{2} \end{pmatrix}_\beta = (1, 0, -7, \sqrt{2}).$$

Perceba que o uso de coordenadas evidencia que o conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é similar a $\mathbb{R}^4$.

13. Já vimos que $\gamma = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ é l.i. Vamos mostrar que γ é base de $\mathbb{R}^3$.

Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, queremos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \\ &= (a,a,a) + (b,b,0) + (c,0,0) \\ &= (a+b+c, a+b, a).\end{aligned}$$

Obtemos então (sistema linear em a, b, c).

$$\begin{cases} a+b+c = x \\ a+b = y \\ a = z \end{cases} \sim \begin{cases} a = z \\ b = y-z \\ c = x-y \end{cases}$$

Portanto,

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$$

Daí β é base de $\mathbb{R}^3$. Além disso,

$$(x,y,z)_\beta = (z, y-z, x-y).$$

Por exemplo,

$$(1,2,3)_\beta = (3, -1, -1).$$

Assim, vale que

$$(1,2,3) = 3(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + (-1)(1,0,0).$$