Subespaço Vetorial

Definição. Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto W de V é denominado um subespaço vetorial se:

(i) $0 \in W$,

(ii) $\forall w_1, w_2 \in W$, vale que $w_1 + w_2 \in W$,

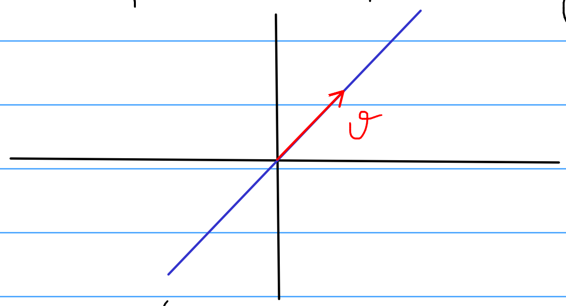
(iii) $\forall w \in W$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, vale que $\lambda w \in W$.

Observação. (1) Outra forma de definir é a seguinte: um subconjunto não-vazio W é um subespaço vetorial se W, com as operações induzidas, é um espaço vetorial.

(2) Todo espaço vetorial V admite sempre os seguintes subespaços: $\{0\}$, V.

Exemplos.

1. No plano $\mathbb{R}^2$, um subespaço pode ser:
   (a) $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$,
   (b) uma reta passando pela origem.



Dados x_1, x_2 na reta, podemos escrever $x_1 = \lambda_1 v$ e $x_2 = \lambda_2 v$. Daí $x_1 + x_2 = \lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2) v$ ainda está na reta.

De forma análoga, vale (iii). Portanto, a reta é um subespaço vetorial.

2. Um plano passando pela origem é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Se o plano não passa pela origem, então não é subespaço vetorial.

3. O subconjunto
$W = \{(0,a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x=0\} \subseteq \mathbb{R}^4$
é um subespaço vetorial:

(i) $\mathbf{0} = (0,0,0,0) \in W$

(ii) Sejam $v_1 = (0,a_1,b_1,c_1)$, $v_2 = (0,a_2,b_2,c_2) \in W$. Então

$$v_1 + v_2 = (0, a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) \in W.$$

(iii) Dado $v = (0,a,b,c) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda v = (\lambda 0, \lambda a, \lambda b, \lambda c) = (0, \lambda a, \lambda b, \lambda c) \in W.$$

4. O conjunto das matrizes simétricas é um subespaço vetorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Também são subespaços: conjunto das matrizes triangulares superiores, conjunto das matrizes diagonais, etc...

$$S_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a,b,d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b-c=0 \right\}$$

5. O conjunto solução de um sistema linear **homogêneo** é um subespaço vetorial (exercício: verifique os detalhes).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad S$$

$$\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0) \in S$$

Teorema. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V. Então $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial.

Exemplos.

6\. Sejam $W_1 \neq W_2$ planos passando pela origem no espaço $\mathbb{R}^3$. Ambos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$, e, do teorema anterior, $W_1 \cap W_2$ é subespaço também. Relembre que a intersecção de dois planos distintos é uma reta.

7\. Sejam

$$S_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, b - c = 0 \right\} \quad e \quad UT_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, c = 0 \right\}.$$

Então

$$S_{2\times 2} \cap UT_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, b - c = 0 \text{ e } c = 0 \right\} =$$

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, b = c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

é o conjunto das matrizes diagonais.

Definição. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$. Dizemos que um elemento $v \in V$ é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_m$, se existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m.$$

Notação. Dados $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$, denota-se por

$$[v_1, v_2, \ldots, v_m] \quad \text{ou} \quad \text{ger}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Ou seja,

$$[v_1, v_2, \ldots, v_m] = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema. ger$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é um subespaço vetorial.

Exemplos.

1. Seja $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$. Então $W = \text{ger}\{v\}$ é uma reta passando pela origem, e tendo v como vetor diretor.

2. Vamos encontrar um conjunto de geradores para $\mathbb{R}^3$. Denote

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\{e_1, e_2, e_3\}$.

De fato, dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) =$$

$$= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$= x e_1 + y e_2 + z e_3,$$

portanto, conseguimos escrever um $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ arbitrário como combinação linear de e_1, e_2 e e_3.

Observação. Seja $u \in \mathbb{R}^3$ qualquer. Então também é verdade que

$$\mathbb{R}^3 = \text{ger}\{e_1, e_2, e_3, u\}.$$

Então $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e_1, e_2, e_3, u\}$ são conjuntos geradores de $\mathbb{R}^3$.

Qual dos dois conjuntos é "melhor"?