Espaço Vetorial

A noção de espaço vetorial surge como a abstração (ou axiomatização) do espaço $\mathbb{R}^n$ (ou do conjunto dos vetores no plano ou no espaço).

Definição. Um espaço vetorial real é um conjunto V munido de duas operações:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad , \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2 \qquad \qquad (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

(soma) (multiplicação por escalar)

satisfazendo: $\forall u, v, w \in V$,

(i) $u + v = v + u$,

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$,

(iii) $\exists\, 0 \in V$ tal que $0 + v = v$, $\forall v \in V$,

(iv) $\forall v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$,

(v) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$

(vi) $\lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(vii) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,

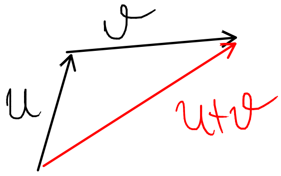
(viii) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

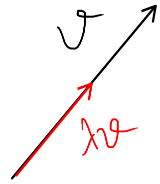
Observações.

(i) Um espaço vetorial é uma terna $(V, +, \cdot)$ satisfazendo os axiomas (i) - (viii). Por abuso de linguagem, vamos nos referenciar ao espaço vetorial somente pelo conjunto V.

(ii) O ponto da multiplicação por escalar, em geral, é omitido.

Nomenclatura. Um vetor é um elemento de um espaço vetorial. O elemento 0 do axioma (iii) é denominado de vetor nulo.





Exemplos.

1. O conjunto dos vetores no plano (ou no espaço), munido da soma de vetores e multiplicação de um número real por vetor, é um espaço vetorial.

2. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da soma e produto usuais, é um espaço vetorial.

3. O conjunto das n-uplas
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$
é um espaço vetorial, munido da soma e multiplicação por escalar usuais de $\mathbb{R}^n$.

4. Fixe inteiros m e n, e considere o conjunto
$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{\text{matrizes de tamanho } m\times n\},$$
munido da soma de matrizes e multiplicação de escalar por matriz. Então $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

5. Sejam $n \in \mathbb{N}$ fixo e
$$P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos definir soma e multiplicação por escalar em $P_n(\mathbb{R})$:

$$(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \dots + (a_n+b_n)X^n,$$

$$\lambda\cdot(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \dots + \lambda a_n X^n.$$

O conjunto $P_n(\mathbb{R})$, munido de tais operações, é um espaço vetorial. (verifique)

6. O espaço vetorial nulo, é o conjunto contendo somente um único elemento $V = \{0\}$ é um espaço vetorial (exercício: verifique). As operações são:

$$0 + 0 = 0$$
$$\lambda \cdot 0 = 0$$

7. (exemplo patológico). Seja $V = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ o conjunto dos números reais positivos, e defina as operações seguintes:

$\rightarrow a \boxplus b = ab \quad , \quad \forall a, b \in V$

$\rightarrow \lambda \boxdot a = a^{\lambda} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ a \in V.$

Então, $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial.

(i) $a \boxplus b = ab = ba = b \boxplus a$

(ii) $(a \boxplus b) \boxplus c = (ab) \boxplus c = (ab)c = a(bc) = a \boxplus (bc)$
$= a \boxplus (b \boxplus c).$

(iii) O vetor nulo é 1, pois
$$1 \boxplus a = 1a = a \quad , \quad \forall a \in V.$$

(iv) Dado $a \in V$, temos que $\frac{1}{a} \in V$, e
$$a \boxplus \frac{1}{a} = a \frac{1}{a} = 1.$$

(v) – (viii) exercício.

$i^2 = -1$

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

8. O conjunto $\mathbb{C}$ munido da soma de $\mathbb{C}$, e multiplicação por escalar sendo o produto de um número real por um complexo, é um espaço vetorial real.

Observação. Podemos definir a noção de espaço vetorial complexo: basta trocar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ na multiplicação por escalar na definição de espaço vetorial real.

O objetivo será provar teoremas e construções para espaços vetoriais reais. Para isso, temos que utilizar **Somente** os axiomas (i) - (viii). Com isso, todos os teoremas serão válidos para os exemplos 1 - 8, e diversos outros.

Mas, é fundamental ter em mente o espaço $\mathbb{R}^n$ (ou, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Teorema. Seja V um espaço vetorial. Então

(i) $0 \cdot v = \mathbf{0}, \ \forall v \in V.$

(ii) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$

(iii) $(-1) \cdot v = -v, \ \forall v \in V.$

Demonstração. (i) Sabe-se que $0 = 0 + 0$ (o número zero). Então, para qualquer $v \in V$, vale:

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v \overset{(vii)}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v.$$

Do axioma (iv), podemos somar $-0 \cdot v$ de ambos os lados:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} \overset{(iv)}{=} 0 \cdot v + (-0 \cdot v) &= (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \\
&\overset{(ii)}{=} 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v)) \\
&\overset{(iv)}{=} 0 \cdot v + \mathbf{0} \overset{(iii)}{=} 0 \cdot v
\end{aligned}$$

Daí $0 \cdot v = \mathbf{0}$.

(ii) e (iii) ficam de exercício. $\square$