Sejam

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\mathrm{tr}(AB + A^2B - 2BA^2 + ABA + C)$.

$$\mathrm{tr}(AB + A^2B - 2BA^2 + ABA + C) =$$

$$= \mathrm{tr}(AB) + \underbrace{\underbrace{\mathrm{tr}(A^2B)}_{\mathrm{tr}(BA^2)} - 2\,\mathrm{tr}(BA^2) + \underbrace{\mathrm{tr}(A(BA))}_{\mathrm{tr}((BA)\cdot A) = \mathrm{tr}(BA^2)}}_{0} + \mathrm{tr}(C)$$

$$= \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}\,C = -35 + (-1) = -36.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & ? & ? \\ ? & -30 & ? \\ ? & ? & 20 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(AB) = -25 + (-30) + 20 = -35$$

$$\mathrm{tr}(C) = 2 + (-1) + (-2) = -1$$

Tome constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calcule o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -10 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 4 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A é triangular superior, e portanto,

$$\det A = 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -16.$$

Calcule o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 6(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4(-2) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 36 + 8 = 44$$

$$= \left(6 \cdot 6 - 4(-2)\right) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 44.$$

Outra forma

$L_1' = \frac{1}{6} L_1$

$L_3' = \frac{1}{5} L_3$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 1/2 & -1 \\ 4 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$L_2' = L_2 - 4L_1$

$L_4' = L_4 - 2L_3$

$$= 6 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 1/2 & -1 \\ 0 & 22/3 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \cancel{5} \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cancel{5}}$$

$$= 44.$$

$6 + 4/3 = 22/3$

$1 - 4/5$

Seja Π o plano que passa por $x_0 = (4, 6, 4)$, e admite o vetor $n = (4, 0, 3)$ como normal. Calcule a distância de $P = (4, -5, 9)$ a Π.

A equação do plano é

$$0 = \langle (x-4, y-6, z-4), (4,0,3) \rangle =$$

$$= 4(x-4) + 0(y-6) + 3(z-4) = 4x + 3z - 28.$$

$$d(P, \Pi) = \frac{|4.4 + 3.9 - 28|}{\sqrt{4^2+0^2+3^2}} = \frac{|16-1|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Seja r a reta que passa por $(-6, 1)$, e é paralelo ao vetor $v = (3, 4)$. Calcule a distância de $P = (-1, 1)$ a r.

A equação da reta:

$$(x, y) = (-6, 1) + t(3, 4) = (-6+3t, 1+4t), t \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \iff t = \frac{x+6}{3} = \frac{y-1}{4}$$

$$\iff 4x + 24 = 3y - 3$$

$$\iff 4x - 3y + 27 = 0.$$

$$d(P, r) = \frac{|4.(-1) - 3(1) + 27|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-12+27|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Sejam $A = (-6, -3, 7)$, $B = (-2, -3, 7)$, e $C = (-3, 1, 7)$. Calcule a área do triângulo ABC.

Sejam $u = \vec{AB} = (-2, -3, 7) - (-6, -3, 7) = (4, 0, 0)$

$v = \vec{AC} = (-3, 1, 7) - (-6, -3, 7) = (3, 4, 0)$

Daí a área é

$$S = \frac{1}{2} \| u \times v \| = \frac{1}{2} \| (4,0,0) \times (3,4,0) \| = \frac{1}{2} \| (0,0,16) \| = 8.$$

$$(4,0,0) \times (3,4,0) = \underbrace{(4,0,0) \times (3,0,0)}_{0} + (4,0,0) \times (0,4,0) = 16(0,0,1)$$

1. Determine os valores de c com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução, ou tem infinitas soluções:

$$\begin{cases} x - 6y + 18z = 3 \\ 2x - y + 7z = -2 \\ 2x - 12y + c^2 z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 18z = 3 \\ 2x - y + 7z = -2 \\ 2x - 12y + c^2 z = c \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2' = L_2 - 2L_1 \\ \sim \\ L_3' = L_3 - 2L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x - 6y + 18z = 3 \\ 11y - 29z = -8 \\ (c^2 - 36)z = c - 6 \end{cases}$$

- Se $c^2 - 36 \neq 0$, então o sistema possui solução única. Ou seja, $c \neq 6$ e $c \neq -6$ implica uma única solução.

- Se $c^2 - 36 = 0$ e $c - 6 = 0$ (ou seja, se $c = 6$), então o sistema possui infinitas soluções.

- Se $c^2 - 36 = 0$ e $c - 6 \neq 0$ (ou seja, $c = -6$), então o sistema não possui solução.

2. Caso exista, calcule o inverso da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} -6 & -17 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -6 & -17 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -17 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4' = L_4 + 5L_3}{\overset{L_2' = L_2 + 6L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 38 & -20 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_3' = L_3 + L_4}{\sim}$$

$L_2' = L_2 - 20L_4$

$L_1' = L_1 - 3L_4$

$L_4' = -L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & 38 & 0 & 1 & 6 & -20 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \underset{L_2' = L_2 - 38L_3}{\overset{L_1' = L_1 - 7L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & -57 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -58 & -328 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1' = L_1 - 3L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -17 & 164 & 927 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -58 & -328 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

Daí, a matriz inversa é

$$\begin{pmatrix} -3 & -17 & 164 & 927 \\ 1 & 6 & -58 & -328 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$