Produto Vetorial

Definição. Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Define-se o produto vetorial de u e v por

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Mnemônico: podemos considerar o "determinante" seguinte para lembrar da fórmula de produto vetorial:

$$\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,i + (-u_1v_3 + u_3v_1)\,j + (u_1v_2 - u_2v_1)\,k$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k.$$

Exemplo. Sejam $u = (1,0,0)$ e $v = (0,1,0)$. Então

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = (0, 0, 1\cdot 1 - 0\cdot 0) = (0,0,1).$$

Ou,

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k$$

Note que

$$(0,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,0\cdot 0 - 1\cdot 1) = (0,0,-1)$$

Exemplo. Sejam $u=(1,2,3)$ e $v=(1,-1,0)$. Então

$$u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3j - k - 2k + 3i$$
$$= (3,3,-3).$$

Note que

$$\langle u, u\times v\rangle = \langle (1,2,3),(3,3,-3)\rangle = 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) = 0$$
$$\langle v, u\times v\rangle = \langle (1,-1,0),(3,3,-3)\rangle = 1\cdot 3 + (-1)\cdot 3 + 0\cdot(-3) = 0.$$

Teorema. Sejam $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ e $\lambda\in\mathbb{R}$. Então:

(i) $u\times v = -v\times u$.
(ii) $u\times u = (0,0,0)$
(iii) $u\times(v+w) = u\times v + u\times w$
(iv) $(\lambda u)\times v = \lambda(u\times v) = u\times(\lambda v)$

Teorema. Sejam $u,v\in\mathbb{R}^3$. Então

(i) $\langle u, u\times v\rangle = \langle v, u\times v\rangle = 0$,
(ii) $\|u\times v\|^2 = (\|u\|\,\|v\|)^2 - (\langle u,v\rangle)^2$.

Exemplo. Em geral, não vale que $u\times(v\times w) = (u\times v)\times w$.
De fato, tome

$$u=(1,0,0),\ v=(1,0,0),\ w=(0,1,0).$$

Então

$$u\times(v\times w) = (1,0,0)\times((1,0,0)\times(0,1,0)) = (1,0,0)\times(0,0,1) =$$
$$= (0,-1,0).$$

Por outro lado,

$$(u\times v)\times w = \underbrace{((1,0,0)\times(1,0,0))}_{(0,0,0)}\times(0,1,0) = (0,0,0)$$

Observação. Lembre-se que $\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$.
Então, de (ii) do teorema anterior

$$\|u\times v\|^2 = (\|u\|\,\|v\|)^2 - (\langle u,v\rangle)^2 =$$
$$= (\|u\|\,\|v\|)^2 - (\|u\|\,\|v\|)^2\cos^2\theta$$
$$= (\|u\|\,\|v\|)^2(1-\cos^2\theta) = (\|u\|\,\|v\|)^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta.$$

Daí $\|u\times v\| = \|u\|\,\|v\|\,\mathrm{sen}\,\theta$, em que θ é o ângulo entre u e v.

Teorema. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. Então $\|u\times v\|$ coincide com a área do paralelogramo determinado por u e v.

Exemplo. Determine a área do triângulo cujos vértices são $A=(1,1,0)$, $B=(1,2,3)$ e $C=(2,1,1)$.

Sejam
$$u = \overrightarrow{AB} = (1,2,3)-(1,1,0) = (0,1,3)$$
$$v = \overrightarrow{AC} = (2,1,1)-(1,1,0) = (1,0,1).$$

Então, a área do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo determinado por u e v.

Temos que
$$u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i+3j-k = (1,3,-1).$$

Daí
$$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2}\|u\times v\| = \frac{1}{2}\|(1,3,-1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{11}.$$

Será interessante considerar o produto misto
$\langle u, v \times w \rangle$.

Note que, se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$,

$$\langle u, v \times w \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3), (v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1) \rangle$$
$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} + (-1) u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo. Sejam $u = (3, -2, -5)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 3, 2)$.
Então

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 3k - 2j = (2, -2, 3),$$

$$\langle u, v \times w \rangle = \langle (3, -2, -5), (2, -2, 3) \rangle = 3 \cdot 2 + (-2)(-2) + (-5) \cdot 3$$
$$= 6 + 4 - 15 = -5.$$

Por outro lado,

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 15 + 4 = -5.$$

Teorema. 1. Dados $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, então a área do paralelogramo determinado por u e v coincide com

$$\left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|.$$

2. Dados $u=(u_1, u_2, u_3)$, $v=(v_1, v_2, v_3)$, $w=(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, o volume do paralelepípedo determinado por u, v e w é

$$\left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$

Exercícios

3.4: ▶ Nos Exercícios 17–20, encontre a solução geral do sistema linear e confirme que os vetores linha da matriz de coeficientes são ortogonais aos vetores solução. ◀

17. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, o sistema é equivalente a $AX = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3' = L_3 - 3L_1}{\overset{L_2' = L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então o sistema é equivalente a

$$\{ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \{ x_1 = -x_2 - x_3.$$

Daí, a solução geral é

$$\{(-t_1 - t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = -x_2 - x_3\}$$
$$= \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos checar que um elemento genérico do conjunto solução é ortogonal às linhas de A:

- $\langle (1,1,1), (-t_1 - t_2, t_1, t_2) \rangle = 1 \cdot (-t_1 - t_2) + 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 = 0.$

Temos também

- $\langle (2,2,2), (-t_1-t_2, t_1, t_2)\rangle = \langle 2(1,1,1), (-t_1-t_2, t_1, t_2)\rangle$

$$= 2\underbrace{\langle (1,1,1), (-t_1-t_2, t_1, t_2)\rangle}_{0} = 0.$$

- $\langle (3,3,3), (-t_1-t_2, t_1, t_2)\rangle = 3\underbrace{\langle (1,1,1), (-t_1-t_2, t_1, t_2)\rangle}_{0} = 0$

3.4: **25.** Considere os sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (*)$$

(a) Encontre uma solução geral do sistema homogêneo.

(b) Confirme que $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ é uma solução do sistema não homogêneo.

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para encontrar uma solução geral do sistema não homogêneo.

(d) Confira sua resposta na parte (c) resolvendo diretamente o sistema não homogêneo.

(a)
$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3' = L_3 + L_1}{\overset{L_2' = L_2 - 2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Então o sistema fica

$$\{ 3x + 2y - z = 0 \sim \{ x = -\tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z.$$

O conjunto solução é

$$\{ (-\tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \}.$$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2.0 + (-1)\cdot 1 \\ 6\cdot 1 + 4.0 + (-2)\cdot 1 \\ -3\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Portanto, $(1,0,1)$ é solução do sistema $(*)$.

(c) O conjunto solução é

$$\{(1,0,1) + (-\tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(1 - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z, y, 1+z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3' = L_3 + L_1}{\overset{L_2' = L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Então o sistema fica equivalente a

$$\{ 3x + 2y - z = 2 \iff x = -\tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{2}{3}.$$

A solução do sistema é

$$\{(-\tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{2}{3}, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} =$$

(fazendo $z = z' + 1$)

$$= \{(-\tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z' + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}, y, z'+1) \mid y, z' \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(1 - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z', y, z'+1) \mid y, z' \in \mathbb{R}\}$$