Equação vetorial da reta e do plano

Exemplos.

1. Seja $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$. Então, $\{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ é uma reta, paralela a v e que passa pela origem.

2. Sejam $x_0 = (1,1)$ e $v = (1,-1)$, elementos de $\mathbb{R}^2$. Então
$$\{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$
é uma reta que passa por x_0, e é paralela a v.

Assim, uma equação de reta pode ser denotada por
$$X = x_0 + tv, \quad t \in \mathbb{R},$$
em que x_0 e v são fixos, e t varia no conjunto dos reais. No caso especial em que a reta passa pela origem, a equação fica
$$X = tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definição. Sejam $x_0, v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq 0$. A reta paralela a v e passando por x_0 é o conjunto
$$\{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}.$$
Representa-se a reta pela equação vetorial
$$X = x_0 + tv.$$

Exemplo. Sejam $x_0 = (1,1,0)$, $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,1)$. Note que v_1 e v_2 não são paralelos. O conjunto
$$\{x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(1,1,0) + t_1(1,0,0) + t_2(1,1,1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(1 + t_1 + t_2, 1 + t_2, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

é um plano que passa por x_0, e é paralelo a v_1 e v_2.

Definição. Sejam $x_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, com v_1 e v_2 não paralelos. O plano passando por x_0 e paralelo a v_1 e v_2 é $\{x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.

Denota-se a equação do plano por

$$X = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplos.

1. Descreva a equação vetorial da reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por $x_0 = (1,2,3)$ e é paralelo a $v = (1,0,-2)$.

A equação é

$$\begin{aligned} X = x_0 + tv &= (1,2,3) + t(1,0,-2) \\ &= (1,2,3) + (t,0,-2t) \\ &= (1+t, 2, 3-2t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Descreva, em forma vetorial, a equação da reta em $\mathbb{R}^2$ descrita por $x + 2y - 3 = 0$.

Basta resolver o sistema homogêneo contendo uma única equação

$$\{x + 2y - 3 = 0 \sim x = -2y + 3.$$

Então, $y = t$ é livre e $x = -2t + 3$. Daí, a reta é

$$\{(-2t+3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Então, a equação vetorial é

$$\begin{aligned} X = (-2t+3, t) &= (3, 0) + (-2t, t) \\ &= (3, 0) + t \cdot (-2, 1), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Daí, a reta $x + 2y - 3 = 0$ passa por $(3,0)$, e é paralelo a $(-2,1)$.

3. Determine a equação vetorial do plano $x+2y-3z+4=0$ em $\mathbb{R}^3$.

$$x+2y-3z+4=0 \sim x=-2y+3z-4.$$

Tome $y=t_1$ e $z=t_2$ variáveis livres, e daí

$$x=-2t_1+3t_2-4, \quad t_1,t_2 \in \mathbb{R}.$$

Então o plano é

$$\{(-2t_1+3t_2-4, t_1, t_2) \mid t_1,t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

A equação vetorial é

$$X = (-2t_1+3t_2-4, t_1, t_2) =$$
$$= (-4,0,0) + (-2t_1, t_1, 0) + (3t_2, 0, t_2)$$
$$= (-4,0,0) + t_1(-2,1,0) + t_2(3,0,1), \quad t_1,t_2 \in \mathbb{R}$$

Portanto, o plano $x+2y-3z+4=0$ passa por $(-4,0,0)$ e é paralelo a $(-2,1,0)$ e $(3,0,1)$.

4. Determine uma equação de reta em $\mathbb{R}^4$, que passa pela origem e é paralelo a $v=(1,2,3,4)$.

A equação é

$$X = x_0+tv = t(1,2,3,4) = (t,2t,3t,4t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Determine uma equação do plano em $\mathbb{R}^4$, que passa por $x_0=(2,1,0,-3)$ e é paralelo a $v_1=(1,-5,2,3)$ e $v_2=(7,\sqrt{2},10,0)$.

A equação é

$$X = x_0+t_1v_1+t_2v_2 = (2,1,0,-3)+t_1(1,-5,2,3)+t_2(7,\sqrt{2},10,0)$$
$$=(2,1,0,-3)+(t_1,-5t_1,2t_1,3t_1)+(7t_2,\sqrt{2}t_2,10t_2,0)$$
$$=(2+t_1+7t_2, 1-5t_1+\sqrt{2}t_2, 2t_1+10t_2, -3+3t_1),$$
$$t_1,t_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Determine a equação da reta em $\mathbb{R}^4$ que passa pelos pontos $x_0 = (1,0,1,0)$ e $x_1 = (1,2,3,4)$.

A reta passa por $x_0 = (1,0,1,0)$, e é paralelo a
$$v = x_1 - x_0 = (1,2,3,4) - (1,0,1,0) = (0,2,2,4).$$
Daí, a equação vetorial é
$$X = (1,0,1,0) + t\,(0,2,2,4)$$
$$= (1, 2t, 1+2t, 4t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Considere a equação linear homogênea
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0. \quad (*)$$
Podemos reescrever a equação $(*)$ da seguinte forma:
$$\langle v, X\rangle = 0,$$
em que $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Então o conjunto solução de $(*)$ pode ser interpretado como o conjunto de todos os vetores ortogonais a v.

$$\boxed{\langle v, X\rangle = \langle (a_1, a_2, \ldots, a_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$$

Dado um sistema linear homogêneo:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (**)$$
Definindo $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, podemos reescrever o sistema como
$$\begin{cases} \langle v_1, X\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v_m, X\rangle = 0 \end{cases}$$

Daí, o conjunto soluções de (**) é o conjunto de vetores que é simultaneamente ortogonais a cada um dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Escrevendo (**) na forma matricial $AX=0$, então o conjunto soluções é o conjunto de todos os vetores que são simultaneamente ortogonais a todas as linhas de A.

Exemplo. Sejam
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, o conjunto soluções de $AX=0$ é o conjunto dos vetores ortogonais a $(1,7,3)$ e a $(-1,2,0)$.

Equivalentemente, o conjunto soluções é a intersecção de $x+7y+3z=0$ e do plano $-x+2y=0$.

Por fim, enunciamos o seguinte:

Teorema. Seja A uma matriz $m \times n$, e seja S_0 o conjunto soluções de $AX=0$.

Sejam B uma matriz $m \times 1$ e X_0 uma solução de $AX=B$. Então, o conjunto soluções de $AX=B$ é

$$\{x_0 + v \mid v \in S_0\}.$$