Ortogonalidade

Para vetores u e v de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, temos que

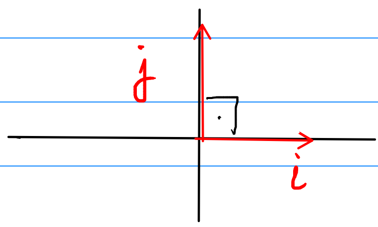
$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta,$$

em que θ é o ângulo entre os vetores. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ou seja, u e v são ortogonais ou perpendiculares), então $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Daí $\langle u, v \rangle = 0$.

Definição. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que u e v são *ortogonais* se $\langle u, v \rangle = 0$.

Dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é um conjunto *ortogonal* se dois a dois os vetores são ortogonais.

Exemplos.



1. Sejam $i = (1,0)$, $j = (0,1)$.
   Então i e j são ortogonais, pois
   $$\langle i, j \rangle = \langle (1,0), (0,1) \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

2. Sejam $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.
   Então o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ é ortogonal. De fato:
   $$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$
   $$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$
   $$\langle e_2, e_3 \rangle = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

3. Sejam $u = (1,2,-7,-1)$ e $v = (5,3,1,4)$. Então
   $$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + (-7) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 =$$
   $$= 5 + 6 - 7 - 4 = 0.$$
   Daí u e v são ortogonais.

Podemos descrever a equação de uma reta em $\mathbb{R}^2$ ou um plano em $\mathbb{R}^3$ à partir de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor n (chamado de vetor normal): tome todos os pontos $P = (x, y)$ tais que $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal a n.

No caso de $\mathbb{R}^2$, denote $n = (a, b)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$. Queremos todos os $P = (x, y)$ tais que

$$0 = \langle n, \overrightarrow{P_0P} \rangle = \langle n, (x - x_0, y - y_0) \rangle = \langle (a, b), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

$$= a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

A equação acima é a equação da reta que passa por P_0 e admite o vetor $n = (a, b)$ como normal.

Podemos escrever na forma:

$$ax + by + c = 0$$

(em que $c = -ax_0 - by_0$).

No caso de $\mathbb{R}^3$, denote $n = (a, b, c)$. Então um plano da forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

admite o vetor $n = (a, b, c)$ como normal.

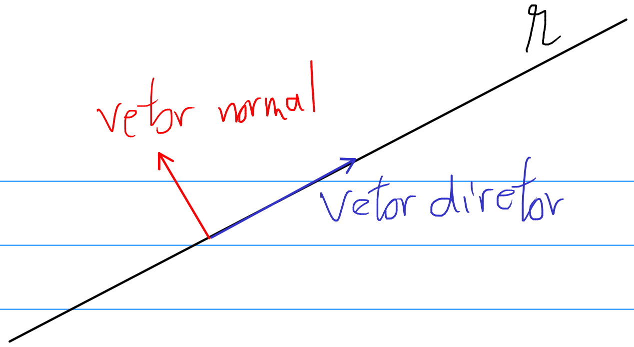
Exemplo. Encontre uma equação do plano que passa por $P_0 = (1, 1, 4)$ e tem $n = (1, 9, 8)$ como normal.

A equação do plano é

$$0 = \langle n, \overrightarrow{P_0P} \rangle = \langle (1, 9, 8), (x - 1, y - 1, z - 4) \rangle =$$

$$= 1 \cdot (x - 1) + 9 \cdot (y - 1) + 8 (z - 4)$$

$$= x + 9y + 8z - 1 - 9 - 8 \cdot 4 = x + 9y + 8z - 42.$$



Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, a projeção de u ao longo de v é o vetor

$$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

Exemplo. Sejam $u = (5,6)$ e $a = (2,-1)$. Encontre $\|\text{proj}_a u\|$.

Temos que

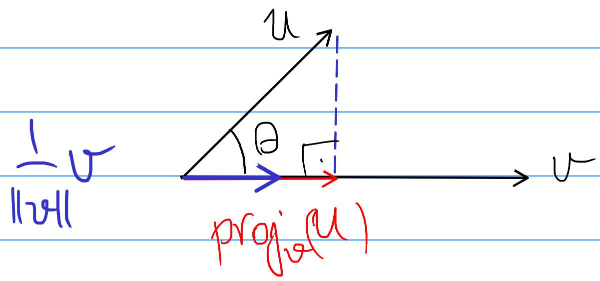
$$\text{proj}_a u = \frac{\langle u, a\rangle}{\|a\|^2} a = \frac{\langle (5,6), (2,-1)\rangle}{2^2 + (-1)^2} (2,-1)$$

$$= \frac{5 \cdot 2 + 6(-1)}{4+1} \cdot (2,-1)$$

$$= \frac{4}{5}(2,-1)$$

A norma é

$$\|\text{proj}_a u\| = \frac{4}{5}\|(2,-1)\| = \frac{4}{5}\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$$



$$\|\text{proj}_v(u)\| = \|u\| \cos\theta$$

$$\text{proj}_v(u) = \|u\|\cos\theta \cdot \frac{1}{\|v\|} v$$

multiplica e divide por $\|v\|$

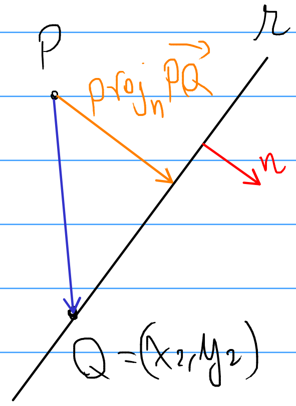
$$\text{proj}_v(u) = \frac{\overbrace{\|u\|\cos\theta \, \|v\|}^{u \cdot v}}{\|v\| \, \|v\|} \cdot v$$

$$= \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

Observação. Note que

$$\|\text{proj}_v u\| = \left\| \frac{\langle u, v\rangle v}{\|v\|^2} \right\| = \frac{|\langle u, v\rangle| \, \|v\|}{\|v\|^2} = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|}$$

Cálculo de distâncias.



Seja $P=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ e a reta $r: ax+by+c=0$.

Seja $Q=(x_2,y_2)$ um ponto qualquer de r.

Então a distância de P a r será

$$d(P,r) = \|proj_n \vec{PQ}\| = \left\| \frac{\langle n, \vec{PQ}\rangle n}{\|n\|^2} \right\| =$$

$$= \frac{|\langle n, \vec{PQ}\rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle (a,b),(x_1-x_2, y_1-y_2)\rangle|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{|a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_1+by_1 \overbrace{-ax_2-by_2}^{c}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$Q=(x_2,y_2)$ está em $r \Rightarrow ax_2+by_2+c=0 \Rightarrow c=-ax_2-by_2$

Assim,

$$d(P,r) = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exercício. Dado $P=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ e $\pi: ax+by+cz+d=0$, então

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exemplos.

1. Encontre a distância entre $P=(-1,4)$ e $r: x-3y+2=0$.

Aplicando a fórmula:

$$d(P,r) = \frac{|(-1)-3\cdot 4+2|}{\sqrt{1+(-3)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}}$$

2. Encontre a distância entre $P=(-1,-1,2)$ e $\pi: 2x+5y-6z=4$.

$$\iff$$

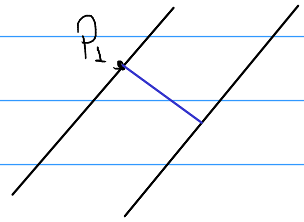
$$\pi: 2x+5y-6z-4=0.$$

Aplicando a fórmula:

$$d(P,\pi) = \frac{|2(-1)+5\cdot(-1)-6\cdot 2-4|}{\sqrt{2^2+5^2+(-6)^2}} = \frac{|-23|}{\sqrt{65}} = \frac{23}{\sqrt{65}}.$$

Distância entre dois planos paralelos: Sejam π_1 e π_2 paralelos (ou seja, os respectivos vetores normais são paralelos). Então $d(\pi_1,\pi_2)$ pode ser calculado da seguinte forma: tome P_1 em π_1 qualquer. Então

$$d(\pi_1,\pi_2) = d(P_1,\pi_2).$$



Exemplo. Sejam

$$\pi_1: 3x-4y+z=1 \quad \text{e} \quad \pi_2: 6x-8y+2z=3.$$

Os planos são paralelos, pois:

$$2\cdot(3,-4,1) = (6,-8,2)$$

Seja $P_1=(0,0,1)$.

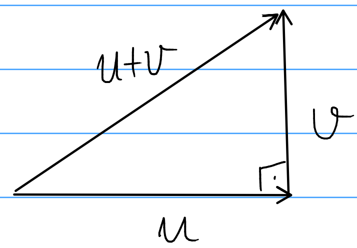
Note que P_1 está em π_1, pois $3\cdot 0-4\cdot 0+1=1$.

Então

$$d(\pi_1,\pi_2) = d(P_1,\pi_2) = \frac{|6\cdot 0-8\cdot 0+2\cdot 1-3|}{\sqrt{6^2+(-8)^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{104}} = \frac{1}{\sqrt{104}}.$$

Teorema de Pitágoras vale para $\mathbb{R}^n$: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ ortogonais. Então

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$



$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle$$

$$= \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\|u\|^2} + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{0} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{0} + \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|^2} = \|u\|^2 + \|v\|^2$$