Norma e Produto interno

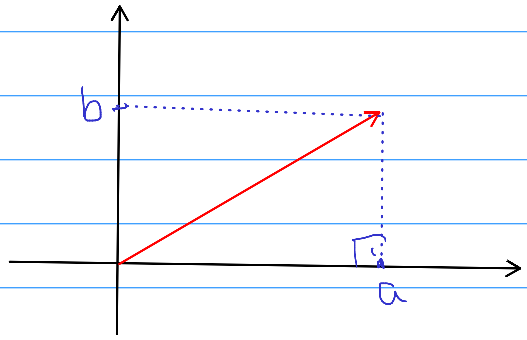
O objetivo de hoje é estender a geometria de vetores no plano e no espaço para $\mathbb{R}^n$.

Def. Seja $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos a norma de u por

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Exemplos.

1. Seja $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.



$$\|v\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Por Teorema de Pitágoras, a norma $\|v\|$ coincide com a magnitude de v.

2. Da mesma forma, conseguimos mostrar que a norma de um $v \in \mathbb{R}^3$ coincide com sua magnitude. (exercício: ilustre com um desenho).

$$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Teorema. Sejam $v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

(i) $\|v\| \geq 0$

(ii) $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

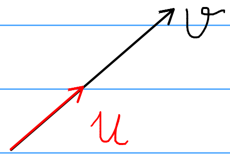
(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Dem.: exercício.

Um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é dito ser unitário se $\|u\| = 1$.

Dado $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, podemos normalizar v da seguinte forma:

$$u = \frac{1}{\|v\|} v.$$



Então, como $\frac{1}{\|v\|} > 0$, u tem a mesma direção e sentido de v.

Mas

$$\|u\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1.$$

Daí u é unitário.

Exemplo. Seja $v = (-1, 1, 2)$. Então

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

Ainda,

$$u = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 1, 2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

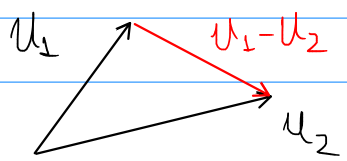
é unitário. De fato,

$$\|u\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{6}} = \sqrt{1} = 1.$$

Distância de pontos ou vetores. Dados $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, definimos a distância de u_1 e u_2 por

$$d(u_1, u_2) := \|u_1 - u_2\|.$$

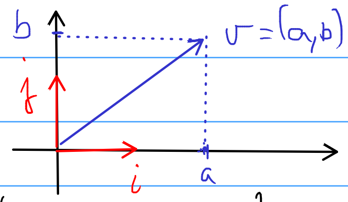


Exemplo. Sejam $u = (1,2,0,0)$, $v = (-1,1,7,2) \in \mathbb{R}^4$. Então

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (2-1)^2 + (0-7)^2 + (0-2)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{58}.$$

Vetores unitários canônicos. Em $\mathbb{R}^2$, é natural considerar os vetores

$$\mathbf{i} = (1,0) \quad , \quad \mathbf{j} = (0,1)$$



Qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. De fato: dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

(exemplo concreto: $(2,7) = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$).

Em $\mathbb{R}^3$ temos os vetores

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

que são unitários. Além disso todo (x,y,z) é comb. linear dos vetores acima, pois

$$(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Generalizando a construção, definimos em $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1,0,\dots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0), \quad \dots, \quad e_n = (0,\dots,0,1).$$

Os vetores são unitários. Além disso,

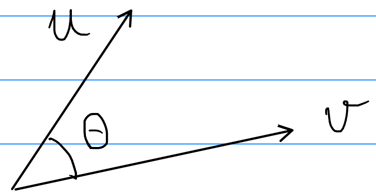
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

O conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é denominado base canônica de $\mathbb{R}^n$, ou conjunto de vetores unitários canônicos.

Exemplo. Tome $(7,0,1,-2) \in \mathbb{R}^4$. Então

$$\begin{aligned}(7,0,1,-2) &= 7(1,0,0,0) + 0(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + (-2)(0,0,0,1) \\ &= 7e_1 + e_3 - 2e_4.\end{aligned}$$

Dado dois vetores u e v no **plano e no espaço**, definimos o ângulo entre u e v da seguinte forma: posicionamos a cauda de ambos os vetores no mesmo ponto, e consideramos o menor ângulo θ (ou seja, $0 \leq \theta \leq \pi$).

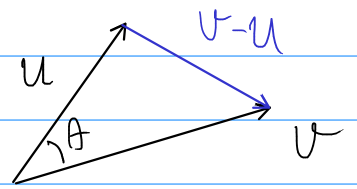


Definimos o produto escalar de u e v por

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta.$$

(note que produto escalar está relacionado com projeção).

Considere:



$$u = (u_1, u_2)$$
$$v = (v_1, v_2)$$

Então

$$\begin{aligned}\|v-u\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cos\theta \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u \cdot v)\end{aligned}$$

$\therefore$

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (v_1-u_1)^2 - (v_2-u_2)^2\right) = u_1v_1 + u_2v_2$$

Daí $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Se fossem $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, então teríamos que

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Def. Sejam $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Define-se seu produto escalar, ou produto interno, denotado por $u \cdot v$ ou $\langle u, v \rangle$, via

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Exemplo. Sejam $u = (7, 0, -1, 2)$, $v = (1, -1, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$. Então

$$\langle u, v \rangle = 7 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 15.$$

Obs. Norma e produto interno estão relacionados pela fórmula

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\langle u, u \rangle = u_1 \cdot u_2 + u_2 \cdot u_2 + \cdots + u_n \cdot u_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$

Teorema. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

(i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

(ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

(iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(iv) $\langle v, v \rangle \geq 0$, e $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

Dem.: exercício.

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Então

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Segue que
$$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\cdot\|v\|} \leq 1$$
Daí
$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \leq 1.$$

Daí, **definimos** o ângulo entre u e v por
$$\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\right).$$

No caso de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a fórmula coincide com a primeira definição de ângulo entre os vetores.

Podemos relacionar produto interno com produto de matrizes. Dados $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, então $[u]$ representa a matriz coluna de suas coordenadas, ou seja,
$$[u]=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Além disso, uma matriz 1×1 pode ser identificado com $\mathbb{R}$. Daí
$$\langle u,v\rangle = [u]^T[v].$$

Exemplo. Sejam $u=(0,-1,-2,7)$, $v=(3,2,1,0)$. Então
$$\langle u,v\rangle = 0\cdot3+(-1)\cdot2+(-2)\cdot1+7\cdot0=-4,$$
$$[u]^T[v]=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, seja Av o elemento de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são dadas pelo produto matricial $A[v]$.

Exemplo. Sejam $v = (1,2,3)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, se $w = Av$, vale que

$$[w] = A[v] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Então $w = Av = (-3, 9, 20)$.

A função $v \in \mathbb{R}^n \mapsto Av \in \mathbb{R}^n$ é denominada transformação linear.

Teorema. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Au, v\rangle = \langle u, A^T v\rangle.$$

Dem.: Usando a identificação do produto interno com mult. de matrizes, temos:

$$\langle Au, v\rangle = [Au]^T[v] = (A[u])^T[v] =$$

$$= [u]^T A^T [v] = [u]^T [A^T v] = \langle u, A^T v\rangle. \ \square$$