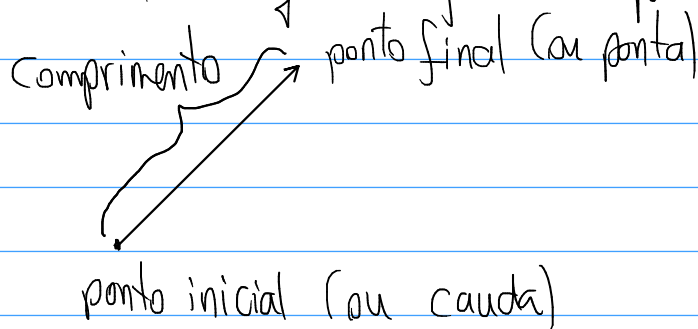


Vetores e Combinação Linear

Considere flechas no plano ou no espaço. As flechas possuem três propriedades: ponto inicial (ou cauda), ponto final (ou ponta), e comprimento (ou magnitude). A direção da flecha é a reta que contém a flecha. O seu sentido é o sentido que a flecha aponta.

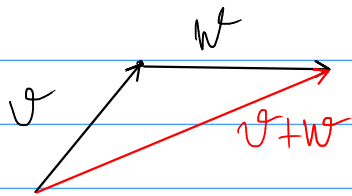


Duas flechas são ditas ser equivalentes se possuem o mesmo comprimento, direções paralelas e mesmo sentido. Um vetor (no plano ou no espaço) é uma classe de equivalência de flechas. Isso significa que, dada uma flecha v , considera-se como um vetor representado por v o conjunto de todas as flechas equivalentes a v . Portanto, um vetor admite infinitas representações, e pode ser visto como "não se preocupar com a posição da flecha".

O vetor nulo 0 é o vetor representado pela flecha de comprimento zero. Convencionou-se que o vetor nulo é paralelo a qualquer outro vetor.

Podemos definir a operação de soma em vetores: dados vetores v e w , considere representantes de v e w de modo que o ponto inicial de w coincida com o ponto final de v . Então define-se $v+w$ como sendo o vetor representado pela flecha com ponto inicial de v

e ponto final de w .



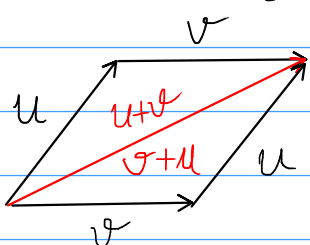
Dado um vetor v , define-se o seu **oposto**, denotado por $-v$, como sendo o vetor com mesmo comprimento, mesma direção, mas sentido oposto em relação a v .

Teorema. Valem as seguintes propriedades:

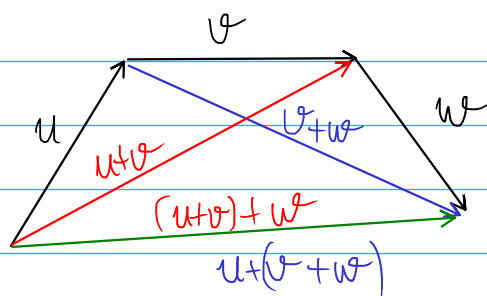
- (S1) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w$ vetores
- (S2) $v + 0 = v$, $\forall v$
- (S3) $v + (-v) = 0$, $\forall v$
- (S4) $u + v = v + u$, $\forall u, v$.

Ideia da demonstração.

(S4)



(S1)

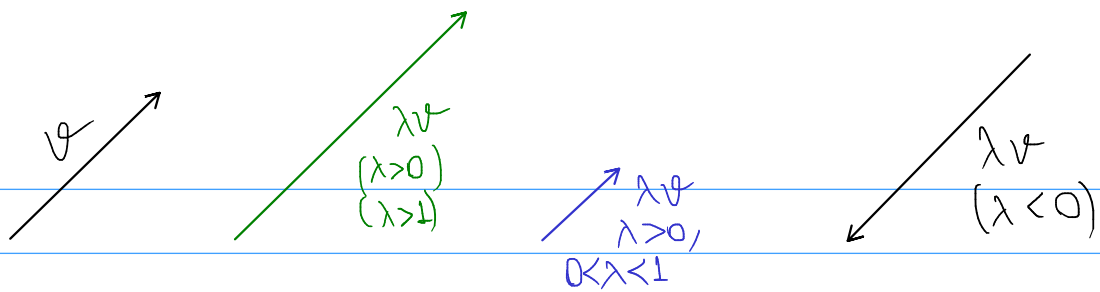


(S2) e (S3): exercício.

□

Definimos a multiplicação por escalar da seguinte forma:
dado um vetor v e $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se:

1. Se $\lambda = 0$, então $0 \cdot v = 0$.
2. Se $\lambda > 0$, então $\lambda \cdot v$ é o vetor de mesma direção e sentido de v , mas com comprimento igual a λ vezes o comprimento de v .
3. Se $\lambda < 0$, então $\lambda \cdot v = |\lambda| \cdot (-v)$.



Note que $(-1) \cdot v = -v$.

Teorema. Valem as seguintes propriedades:

- (M1) $1 \cdot v = v$, $\forall v$ vetor,
- (M2) $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v$,
- (D1) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
- (D2) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.

Considere o conjunto dos números reais, visto como a reta real, denotado por $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^1$. A seguir, tome o conjunto das duplas de números reais

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ serve como um sistema de coordenadas do plano. Seguindo, podemos considerar o conjunto das ternas de números reais:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

O mesmo pode ser interpretado como um sistema de coordenadas do espaço.

Continuando, para n natural, pode-se definir o conjunto das n -uplas de números reais:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

No espaço $\mathbb{R}^n$ pode-se definir operações de soma e multiplicações por escalar:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Definimos igualdade de elementos em $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

Define-se: $0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$,

dado $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, define-se $-v = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Teorema. Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, valem:

$$(S1) \quad u + (v + w) = (u + v) + w,$$

$$(S2) \quad 0 + u = u$$

$$(S3) \quad u + (-u) = 0$$

$$(S4) \quad u + v = v + u$$

$$(M1) \quad 1 \cdot u = u$$

$$(M2) \quad (\lambda \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$$

$$(D1) \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$$

$$(D2) \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

O espaço $\mathbb{R}^n$ munido das operações $+$ e $\cdot$ será denominado de **espaço euclidiano de dimensão n** .

Considere o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Dado um vetor v , tome um representante de v com ponto inicial na origem do plano. Então o ponto final dessa flecha encontra-se num ponto (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. Assim, para cada vetor identificamos um ponto no plano, e vice-versa. Obtemos assim uma correspondência

$$\{\text{vetores no plano}\} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \{\text{pontos no plano}\}.$$

A correspondência é compatível com as operações de soma e multiplicação por escalar.

De forma análoga, temos correspondência boa:

$$\{\text{vetores no espaço}\} \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \{\text{pontos no espaço}\}.$$

Definição. Dizemos que $w \in \mathbb{R}^n$ é **combinação linear** de elementos $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ se existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$w = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m \cdot v_m.$$

Conj. 3.1.

14. Sejam $u = (-3, 1, 2)$, $v = (4, 0, -8)$, $w = (6, -1, -4)$.

Encontre:

(a) $v + (-w)$ (b) $6u + 2v$ (c) $-v + u$

$$(a) \ v + (-w) = (4, 0, -8) + (-6, 1, 4) = (4 + (-6), 0 + 1, -8 + 4) = (-2, 1, -4)$$

$$(b) \ 6u + 2v = 6 \cdot (-3, 1, 2) + 2 \cdot (4, 0, -8) = (6 \cdot (-3), 6 \cdot 1, 6 \cdot 2) + (2 \cdot 4, 2 \cdot 0, 2 \cdot (-8)) = (-18, 6, 12) + (8, 0, -16) = (-10, 6, -4).$$

$$(c) \ -v + u = (-4, 0, 8) + (-3, 1, 2) = (-7, 1, 10).$$

24. Sejam $u = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $v = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre escalares a e b tais que

$$au + bv = (-8, 8, 3, -1, 7).$$

Queremos a e b tais que

$$\begin{aligned} (-8, 8, 3, -1, 7) &= au + bv = a(2, 1, 0, 1, -1) + b(-2, 3, 1, 0, 2) \\ &= (2a, a, 0, a, -a) + (-2b, 3b, b, 0, 2b) \\ &= (2a - 2b, a + 3b, b, a, -a + 2b). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b = -8 \\ a + 3b = 8 \\ \boxed{b = 3} \\ \boxed{a = -1} \\ -a + 2b = 7 \end{cases}$$

Então obtemos que, caso a e b existam, deve valer que $a = -1$ e $b = 3$. Vamos verificar que este par de números satisfaz todas as demais equações:

$$2a - 2b = 2(-1) - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8$$

$$a + 3b = -1 + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8$$

$$-a + 2b = -(-1) + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$$

Portanto, vale que

$$(-8, 8, 3, -1, 7) = (-1) \cdot (-2, 1, 0, 1, -1) + 3 \cdot (-2, 3, 1, 0, 2)$$