Propriedades de Determinante

Vamos estudar algumas propriedades de determinante.

Exemplo. Nem sempre vale que
$$\det(A+B) = \det A + \det B.$$
De fato, sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
então
$$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$
$$\det A + \det B = 0 + 0 = 0 \neq 1.$$

Teorema. Sejam M uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então
$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M).$$

Exemplo. Se $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então
$$\det(\lambda M) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 \det M.$$

Teorema. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Então
$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$
A demonstração será omitida.

Exemplo. Sejam
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ então } AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Ainda, $\det A = 1\cdot 4 - 2\cdot 1 = 2$, $\det B = 2\cdot 3 = 6$.

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 2\cdot 13 - 2\cdot 7 = 12.$$

Teorema. Se M é invertível, então $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$.

Demonstração. Temos que $I = M\cdot M^{-1}$. Daí

$$1 = \det I = \det(M M^{-1}) = (\det M)\det(M^{-1})$$

Então

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M}. \qquad \square$$

Definição. Seja $M = (a_{ij})$ uma matriz quadrada. A *matriz de cofatores* de M é

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

A transposta de tal matriz é denominada de *adjunta* de M, e é denotada por $\operatorname{adj} M$.

Exemplo. Seja

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então

$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$, $C_{13} = 0$

$C_{21} = 2$, $C_{22} = 2$, $C_{23} = 0$

$C_{31} = -3$, $C_{32} = -1$, $C_{33} = 1$

A matriz de cofatores é $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A adjunta de M é

$$\operatorname{adj} M = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma propriedade interessante ocorre com o produto $M \cdot \operatorname{adj} M$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det M \cdot I_3 .$$

Note que

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$$

Teorema. Seja M uma matriz quadrada. Então

$$M \cdot \operatorname{adj} M = (\det M) \cdot I .$$

Como consequência, obtemos que:

Teorema. Uma matriz é invertível se e só se $\det M \neq 0$.
Neste caso,

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \operatorname{adj} M .$$

Exemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3/2 \\ -3 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. Vamos determinar se

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

é invertível, e vamos determinar sua inversa via a adjunta, em caso positivo.

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 12+12-(-8-12) = 44 \neq 0.$$

A matriz de cofatores é

$$\begin{pmatrix} 24 & 3 & 10 \\ -4 & 5 & 2 \\ -8 & -12 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \operatorname{adj} M = \begin{pmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Daí

$$M^{-1} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercício. Seja $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $\det M \neq 0$. Mostre que

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Por fim, vamos enunciar a Regra de Cramer:

Teorema. Seja $AX = B$ um sistema linear com n eq. e n incógnitas, com $\det A \neq 0$. Então, a única solução do sistema é $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, em que

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

em que A_i é a matriz obtida trocando a i-ésima coluna de A por B.

Exemplo. Vamos resolver o sistema seguinte usando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \det A = 44 \neq 0.$$

As matrizes A_i são:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então, a solução (x_1, x_2, x_3) é

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{12 - 8 - 24 + 12}{44} = \frac{-8}{44}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{6 - 6 - 18 + 4 + 9 - 18}{44}$$

$$= -23/44$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{12 + 6 + 4 + 4}{44} = \frac{26}{44}.$$

Alternativamente, a única solução do sistema é $A^{-1}B$. Ambos devem coincidir!

$$A^{-1}B = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 24 - 8 - 24 \\ 3 + 10 - 36 \\ 10 + 4 + 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -8 \\ -23 \\ 26 \end{pmatrix}.$$