Determinante

Definição. A função determinante associa a cada matriz quadrada M um número real denotado por $\det M$, e satisfaz:

(i) $\det I = 1$.

(ii) Se M' é obtido de M trocando a posição de duas linhas, então

$$\det M' = -\det M.$$

(iii) Se M'' é obtido de M multiplicando uma linha por $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\det M'' = \lambda \det M.$$

(iv) Vale a seguinte propriedade:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12}+a_{12}' & \cdots & a_{1n}+a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Um propriedade similar vale, envolvendo as demais linhas.

Exemplo. Vamos calcular $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Antes, note que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(ii)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Da mesma forma, $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{(iv)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{(iv)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(iii)}{=} \underbrace{3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{0} + 4 \cdot \overbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{(i):\,1} + 2\cdot 3 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{2\cdot 4 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{0}$$

$$= 4\cdot 1 - 2\cdot 3 \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(i)\quad 1} = 4\cdot 1 - 2\cdot 3 = -2.$$

Vamos encontrar outros métodos para calcular determinante. Da definição de det, segue que:

Teorema. Seja M uma matriz quadrada.

1. Se M possui uma linha de zeros, então $\det M = 0$.
2. Se M possui duas linhas repetidas, então $\det M = 0$.
3. Se M' é obtido de M somando um múltiplo de uma linha sobre uma outra linha, então $\det M = \det M'$.
4. Se M é triangular superior (ou inferior), então $\det M$ é o produto das entradas na diagonal principal.

Exemplos.

1. Seja $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Então, se multiplicarmos a primeira linha de M por 0, ainda obtemos o próprio M. Da propriedade (iii), vale que
$$\det M = 0 \cdot \det M = 0.$$
2. Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Então
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3-3\cdot 1 & 4-3\cdot 2 \end{pmatrix} \overset{(iv)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3\cdot 1 & -3\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{(iii)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + (-3) \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
3. $$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{(iv)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{0} = 1\cdot(-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1(-2) = -2.$$

Assim, aplicando operações elementares nas linhas, podemos obter uma matriz triangular superior. Isso nos permite calcular o determinante de forma mais concreta.

Notação.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplos.

1. $(L_2' = L_2 - 2L_1)$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -13 \end{vmatrix} = 2(-13) = -26.$$

2. $(L_2' = L_2 - 4L_1)$, $(L_3' = L_3 - 7L_1)$, $(L_3' = L_3 - 2L_2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 0 = 0.$$

Exercício. Mostre que $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Definição. Sejam M uma matriz quadrada e (i,j) uma entrada de M. Considere a submatriz obtida de M ao excluir a linha i e a coluna j. O determinante da submatriz é denominado o menor da entrada (i,j) de M, e é denotado por M_{ij} ou $m_{ij}(M)$. O número $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ é denominado o cofator da entrada (i,j).

Exemplo. Seja
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$M_{11} = \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = 3+28 = 31, \quad C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 31$$

$$M_{12} = \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -1+8 = 7, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -7$$

$$M_{21} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 = 2, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -2$$

$$M_{31} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2.4 = 8, \quad C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 8.$$

Teorema. Denote $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Então, para qualquer entrada (i,j), valem as fórmulas:

$$\begin{aligned} \det M &= a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in} \\ &= a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}. \end{aligned}$$

A demonstração será omitida.

Teorema. Se M é matriz quadrada, então $\det(M^T) = \det(M)$.

Exemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3' = L_3 + 2L_1}{\overset{L_2' = L_2 + L_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 17/5 \end{vmatrix} =$$

$1 + 3 \cdot 4/5 = 17/5$

$$= 5 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 17/5) = 17.$$

Usando as fórmulas do teorema anterior:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} =$$

$$= 1 \cdot 31 + (-1)(-2) + (-2)\cdot 8 = 31 + 2 - 16 = 17.$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 1 \cdot 31 + 2\cdot(-7) + 0 \cdot C_{13}$$

$$= 31 - 14 + 0 = 17.$$

Exemplo. A escolha de uma linha ou coluna com muitos zeros pode ajudar na conta:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = a_{23}C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(-2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = -(2 - 7\cdot 8) = 58.$$

Exemplo. Pode ser conveniente misturar os teoremas vistos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 8 & 9 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$L_1' = L_1 - 2L_2$
$L_3' = L_3 - 7L_2$
$L_4' = L_4 + 2L_2$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3(2+6) = $$

$$= -24.$$

Exercício. Prove que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

1.6:

18. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pode ser reescrita como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use esse resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$.

(b) Resolva $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

(a) $Ax = x \iff Ax - x = 0 \iff Ax - Ix = 0 \iff (A-I)x = 0$.

Temos que

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queremos resolver

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3' = L_3 - 3L_1}{\overset{L_2' = L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \overset{L_3' = L_3 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Assim, a única solução do sistema é $(0,0,0)$.

Portanto, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é a única solução de $Ax = x$.

(b) $Ax = 4x \iff (A - 4.I)\,x = 0$.

Temos que
$$A - 4.I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Queremos resolver o sistema
$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Escalonando:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3' = L_3 + \frac{3}{2}L_1}{\overset{L_2' = L_2 + L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3' = L_3 + \frac{5}{2}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí o sistema fica
$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Então o conjunto solução do sistema é $\{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Portanto $Ax = 4x \iff x = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$, p/ algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+2 \\ 2+0-2 \\ 3+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$