

Inversa de matriz e Matrizes especiais

Vamos estudar um algoritmo para determinar se uma matriz é invertível ou não, e caso sim, determina-se também a inversa.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Construa a matriz de tamanho $n \times 2n$ concatenando a matriz A com I_n : $[A \ I_n]$.

Exemplo. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, então construímos $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Agora, efetuando operações elementares nas linhas, escalonamos a matriz de forma a obter uma matriz escalonada na forma reduzida. Duas coisas podem acontecer:

(i) Obtemos uma matriz da forma $[I_n \ B]$. Neste caso, a matriz A é invertível, e $A^{-1} = B$.

(ii) Se não obtermos tal forma, então A não é invertível.

Exemplo.

1. Vamos aplicar o método para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Temos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array} \right)$$

Dai A é invertível, e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Fazendo a conta para verificar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vamos ver se $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é invertível. Temos que

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dai, A não é invertível, pois não chegaremos na forma reduzida da forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$.

A ideia fundamental para que o método funcione é o seguinte: assumamos que executamos uma operação elementar

$$[A \quad I_n] \sim [A_1 \quad E]$$

Então vale que $A_1 = E A$ (precisaria provar!).

Assim, ao executar uma sucessão de operações elementares de modo que

$$[A \quad I_n] \sim [I_n \quad B],$$

então vale que $BA = I_n$.

Podemos provar o seguinte resultado:

Teorema. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem.

(i) Se $AB = I$, então $B = A^{-1}$ (ou seja, vale que $BA = I$).

(ii) mesma coisa com o outro lado: $BA = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$.

Exemplo. Vamos verificar se a seguinte matriz é invertível:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vamos aplicar o algoritmo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2' = L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2' = -L_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2' = L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3' = \frac{1}{3} L_3}$$

Portanto, A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo. (Aplicações a sistemas lineares). Considere um sistema linear dada em forma matricial por $AX = B$, em que A é uma matriz quadrada, e X e B são matrizes colunas.

Se A é invertível, então o sistema possui solução, e a solução é única, a saber

$$X = A^{-1}B.$$

Exemplo. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ -y - 2z = 7 \end{cases}$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar se A^{-1} existe:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1' = L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1' = L_1 + 4L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2' = L_2 + 2L_3}$$

Portanto, A^{-1} existe e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema tem solução única, e é dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -25 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Note que, uma vez que calculamos A^{-1} , podemos calcular a única solução de um sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = b_1 \\ y + 3z = b_2 \\ -y - 2z = b_3 \end{cases}$$

A saber, a única solução é

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + 2b_2 + 4b_3 \\ -2b_2 - 3b_3 \\ b_2 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo (método alternativo). Para encontrar a solução de

$$AX = B,$$

em que A é invertível, basta escalonar $[A \ B]$. Por exemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

O seguinte problema será estudado em outros contextos:

Problema. Seja A uma matriz $m \times n$. Para quais matrizes coluna B o sistema $AX = B$ possui solução?

Obs. (i) Se A é invertível, então $AX=B$ sempre tem solução, para qualquer B (a saber, $X=A^{-1}B$).
(ii) Se $B=O_{m \times 1}$, então $AX=B$ tem solução.

Vamos agora estudar alguns tipos especiais de matrizes.

Matriz diagonal. Uma matriz quadrada é dito ser *diagonal* se as entradas fora da diagonal principal são nulas. Assim, uma matriz diagonal possui a forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Produtos de matrizes que envolvem matrizes diagonais são mais fáceis de executar (verifique com alguns exemplos).

Uma matriz diagonal D é invertível se, e somente se, cada $d_i \neq 0$. Neste caso,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Exemplos. São matrizes diagonais

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, (1), \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ainda,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, (1)^{-1} = (1).$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ não é invertível, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ não é invertível.

Matriz triangular. Uma matriz quadrada é dito ser triangular superior se todas as entradas abaixo da diagonal principal são 0.

Dizemos que a matriz é triangular inferior se todas as entradas acima da diagonal principal são 0.

Exemplos. São triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

São triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema. Sejam A e B matrizes triangulares superior.

(i) AB é triangular superior,

(ii) A^T é triangular inferior,

(iii) Se A é invertível, então A^{-1} é triangular superior,

(iv) A é invertível $\Leftrightarrow$ as entradas na diagonal principal são não nulas.

O mesmo teorema vale trocando "triangular superior" para "triangular inferior".

Exemplo. São invertíveis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não são invertíveis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica. Dizemos que uma matriz A é simétrica se $A^T = A$.

Exemplos. São matrizes simétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & \sqrt{7} \\ 3 & \sqrt{7} & 0 \end{pmatrix}, \text{ qualquer matriz diagonal.}$$

Teorema. Sejam A e B matrizes simétricas e $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Então:

- (i) $A+B$ é simétrico,
- (ii) λA é simétrico,
- (iii) se A é invertível, então A^{-1} é simétrica,
- (iv) $AB+BA$ é simétrico.

A demonstração segue das propriedades da transposição.

Observação. Se A e B são matrizes simétricas, então AB não necessariamente é simétrica (exercício: encontre um contra-exemplo).

Teorema. Se A é matriz de tamanho $m \times n$, então AA^T e A^TA são simétricas.

Demonstração. $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$. Da mesma forma,
 $(A^TA)^T = A^T A$. □