Propriedades de Matrizes

A matriz nula é a matriz em que todas as entradas são iguais a 0. Denotamos por $0_{m\times n}$ a matriz nula de tamanho $m\times n$, ou simplesmente por 0.

Teorema. Assuma que as operações seguintes podem ser efetuadas. Então:

(i) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associatividade da soma).

(ii) $A+0 = A$ (existência de elemento nulo)

(iii) $A+(-1)A = 0$ (existência de inverso aditivo)

(iv) $A+B = B+A$ (comutatividade da soma)

(v) $(AB)C = A(BC)$. (associatividade do produto)

(vi) $A\cdot(B+C) = AB+AC$ (distributividade)

(vii) $(A+B)C = AC+BC$

Ainda, se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, valem também:

(viii) $(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$

(ix) $(\lambda_1+\lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$

(x) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

(xi) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Todas as propriedades devem ser demonstradas à partir da definição das operações matriciais. Essas seguem das propriedades dos números reais.

Exemplo. (ordem do produto importa). Já vimos exemplos de matrizes A e B em que AB está definido, e BA não. Vimos também exemplo em que AB e BA possuem tamanhos diferentes, e portanto, não podem ser iguais.

Mais um exemplo: sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Então $AB \neq BA$.

Exemplo. (produto de matrizes não nulas pode ser nulo). Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Então
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nos números reais, se $a \neq 0$ e sabe-se que $ab = ac$, então conclui-se $b = c$. Isso é chamado de lei do cancelamento.

Exemplo (lei do cancelamento não vale para matrizes). Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{2\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Então
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então $AB = AC$, porém $B \neq C$.

Definição. A matriz identidade de ordem n é a matriz quadrada de ordem n que possui 1's na diagonal principal e 0 nas demais entradas. Denota-se tal matriz por I_n, ou somente I, quando o contexto estiver claro.

Observação. Seja A uma matriz $m \times n$. Então $AI_n = A$, e $I_m A = A$. (verifique).

Exemplo. Temos que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Seja
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$
Então
$$I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A,$$
$$A\, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A.$$

Definição. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Uma *inversa* de A é uma matriz quadrada B, de mesma ordem n, tal que
$$AB = BA = I_n.$$

Observação. Se B é uma inversa de A, então A é uma inversa de B.

Exemplo. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma inversa de A, pois
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Teorema. Se A admite inversa, então a inversa é **única**.

Demonstração. Assuma que B_1 e B_2 são inversas de A. Isso significa que $B_1 A = I$ e $A B_2 = I$ (além de outras equações). Daí
$$\begin{aligned} B_1 A B_2 &= B_1 (A B_2) = B_1 \cdot I = B_1 \\ &= (B_1 A) B_2 = I \cdot B_2 = B_2. \end{aligned}$$
Daí $B_1 = B_2$. $\square$

Notação. A única inversa de A, quando a mesma existe, é denotada por A^{-1}.

Teorema. Assuma que A possui inversa e que $AB = AC$, em que B e C são matrizes. Então $B = C$.

Demonstração. Temos que $AB = AC \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(AB)}_{B = IB} = \underbrace{A^{-1}(AC)}_{IC = C}$

Daí $B = C$. $\square$

Se A admite inversa, então denominaremos A de invertível.

Teorema. Sejam A e B matrizes invertíveis de mesmo tamanho. Então AB é invertível e vale que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração. Temos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Daí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\square$

Exemplo. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(de fato, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Temos que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots \right)$

daí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definição. Sejam A uma matriz quadrada e $m \in \mathbb{N}$. Define-se as potências de A por:

- $A^0 = I$
- $A^1 = A$
- $A^m = A^{m-1} \cdot A$, se $m > 1$.

(então $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ vezes}}$)

adicionalmente, se A é invertível, define-se

- $A^{-m} = (A^{-1})^m$.

Exemplos. (a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Então

$$A^2 = A^1 \cdot A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad e \quad A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Note que $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix} = A^{-2}$.

O que seria A^{50}?

Calcular A^{50} dá muito trabalho.

(b) Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Então

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Fica evidente que $(A^2)^{-1} = A^{-2}$.

Além disso

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix}.$$

Teorema. Seja A uma matriz invertível e $m \in \mathbb{N}$. Então

$$(A^m)^{-1} = A^{-m}.$$

Demonstração. exercício.

Definição. Sejam A uma matriz quadrada e $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X^1 + a_0$. A substituição de A em $p(X)$ é

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

Exemplo. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $p_1(X) = 2X^2 + 3$ e $p_2(X) = X^2 - X - 5$. Então

$$p_1(A) = 2A^2 + 3I = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 + 3I = 2\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$p_2(A) = A^2 - A - 5I = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema. Sejam A e B matrizes tais que as operações seguintes podem ser efetuadas. Então:

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$, em que $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

Adicionalmente, se A é invertível, então A^T também é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração: exercício.

Exemplo. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainda $(AB)^T = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = B^T A^T \neq A^T B^T$.

Temos ainda

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$