

Escalonamento

Exemplo. Se houver, determine o conjunto soluções do sistema linear a seguir

$$\begin{cases} 2z + 2w = -12 \\ 2x + 4y - 10z + 2w = 28 \\ 2x + 4y - 5z + 6w = -1 \end{cases}$$

Primeiro, consideramos a matriz aumentada do sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & -10 & 2 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

Passo 1. localizamos a coluna mais à esquerda que não é totalmente formada por zeros

Passo 2. Se necessário, trocamos uma linha de lugar, de modo a obter uma entrada não nula no topo da coluna do Passo 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & -10 & 2 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -10 & 2 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

Passo 3: dividimos a linha no topo pela entrada não nula do Passo 2 de modo a obter um pivô.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -10 & 2 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

Passo 4. Somamos, nas próximas linhas, múltiplas da linha no topo de modo a obter zeros abaixo do pivô:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -29 \end{pmatrix}$$

Passo 5. ignoramos a primeira linha, e voltamos ao Passo 1 na submatriz resultante, caso a matriz não esteja escalonada.

[ou seja, volta ao Passo 1 para $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -29 \end{pmatrix}$]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -29 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2' = \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -29 \end{pmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{L_3' = L_3 - 5L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz ainda não está escalonada. Então, olhamos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e voltamos ao Passo 1.

No novo Passo 3, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema original é equivalente a:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z + w = 14 \\ z + w = -6 \\ w = -1 \end{cases}$$

Nomenclatura. Uma variável que aparece na posição de um pivô é denominado **variável líder**. As demais são denominadas **variáveis livres**. Neste exemplo, x, z e w são líderes, e y é livre.

Com o sistema escalonado, já podemos determinar seu conjunto solução.

Alternativamente, podemos aplicar o passo seguinte para obter o sistema na forma escalonada reduzida:

Passo 6. Começando da última linha, soma-se múltiplos de cada linha nas linhas superiores, para eliminar as entradas acima de cada pivô:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2' = L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\xrightarrow{L_1' = L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1' = L_1 + 5L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Daí, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y = -10 \\ z = -5 \\ w = -1 \end{cases}$$

Obtemos então o conjunto de todas as soluções:

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y=10, z=-5, w=-1\} = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y=t, x=10-2t, z=-5, w=-1, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(10-2t, t, -5, -1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(10, 0, -5, -1) + t(-2, 1, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exemplo. Se houver, determine o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

Consideremos a matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1' = \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2' = L_2 + 2L_1 \\ L_3' = L_3 - 8L_1 \end{array}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3' = L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2' = \frac{1}{7}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

O sistema fica então equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{7}x_3 = 1/7 \end{cases}$$

(x_1 e x_2 são líderes, e x_3 é livre).

Assim, a relação entre as variáveis é: tomamos $x_3 = t \in \mathbb{R}$ livre. Daí

$$e \quad x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t,$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}t - t = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t.$$

Portanto, o conjunto soluções é

$$\left\{ \left(-\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0 \right) + t \left(-\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, 1 \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

_____ //

Alternativamente, podemos transformar a matriz para a forma escalonada reduzida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{7}x_3 = -1/7 \\ x_2 + \frac{4}{7}x_3 = 1/7 \end{cases}$$

○ conjunto soluções é

$$\begin{aligned} & \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = t, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, x_1 = -\frac{3}{7}t - \frac{1}{7}, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0 \right) + t \left(-\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, 1 \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Exemplo. Determine o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} -2b + 3c = 1 \\ 3a + 6b - 3c = -2 \\ 6a + 6b + 3c = 5 \end{cases}$$

A matriz aumentada é

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = L_3 - 2L_1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3' = L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

○ sistema fica equivalente a

$$\begin{cases} 3a + 6b - 3c = -2 \\ -2b + 3c = 1 \\ 0 = 6 \end{cases}$$

Nenhuma terna (a, b, c) pode satisfazer $0 = 6$. Portanto, o conjunto solução é vazio.

Exemplo. Determine os valores de a com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução ou tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + (a^2 - 3)z = a \end{cases}$$

Considere a matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & a^2-3 & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2' = L_2 - 2L_1 \\ L_3' = L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{pmatrix}$$

Então o sistema fica equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -6y + z = -3 \\ (a^2-4)z = a-2 \end{cases}$$

Assim:

- Se $a^2-4 \neq 0$, então o sistema possui uma única solução.
- Se $a^2-4=0$ e $a-2 \neq 0$, o sistema não possui solução.
- Se $a^2-4=0$ e $a-2=0$, o sistema tem infinitas soluções.

Note ainda que $0 = a^2-4 = (a-2)(a+2)$. Daí
 $a^2-4=0 \Leftrightarrow a=2$ ou $a=-2$.

E $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$.

Assim:

- Se $a \neq 2$ e $a \neq -2$, o sistema possui única sol.
- Se $a = -2$, o sistema não possui solução.
- Se $a = 2$, então o sistem. possui inf. sol.