Sistemas Lineares e Escalonamento

Um sistema linear é um conjunto finito de equações lineares. Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

uma solução do sistema é uma n-upla de números reais $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Perceba que o conjunto de todas as soluções de um sistema pode ser visto como uma intersecção das regiões definidas por cada equação linear. Assim, o conjunto das soluções pode ser vazio, conter 1 único elemento, ou conter infinitos elementos.

No caso especial em que $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, o sistema é denominado homogêneo. Neste caso, o sistema **sempre** admite pelo menos uma solução: o $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemplo. Se houver, determine o conjunto das soluções do sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ \quad\;\; y = 3 \end{cases}$$

Assuma que (x,y) é solução do sistema. Da segunda equação, obtemos que $y = 3$. Da primeira equação, podemos escrever x em função de y. Assim

$$2x = 1 + y = 1 + 3$$

Daí $x = 2$. Assim, o conjunto solução é dado por $\{(2,3)\}$.

Exemplo. Se houver, determine o conjunto solução do sistema a seguir, na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Da segunda equação, conseguimos escrever y em função de z. Da primeira, podemos escrever x em função de y e z. A variável z fica então **livre**. Podemos atribuir $z = t$, em que $t \in \mathbb{R}$ é qualquer, e daí

$$y = 1 - z = 1 - t.$$

$$x = -y + z = -(1-t) + t = -1 + 2t.$$

Portanto, o conjunto solução é

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -1+2t,\ y = 1-t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(-1+2t, 1-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos descrever o conjunto anterior da seguinte forma:

$$\{(-1+2t, 1-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(-1,1,0) + (2t,-t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(-1,1,0) + t\cdot(2,-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Escrevendo o conjunto solução nesta forma, evidencia o seguinte:

→ $(-1,1,0)$ é solução do sistema $(*)$,

→ $\{t(2,-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ é solução do sistema homogêneo associado, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Dado um sistema, note que as seguintes operações preservam o conjunto solução:

1. trocar duas equações de posição;
2. multiplicar uma equação por uma constante **não-nula**,
3. somar uma equação multiplicada por uma constante a uma outra equação.

Essas operações são denominadas operações elementares nas equações de um sistema.

Definição. Considere um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A matriz aumentada associada ao sistema é a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Vice-versa, dada uma matriz aumentada, podemos associar um sistema linear.

Denominaremos de operação elementar nas linhas de uma matriz, as operações descritas por 1, 2 e 3.

Definição. Diremos que uma matriz está na forma escalonada por linhas, ou somente forma escalonada, se satisfaz as seguintes condições:

1. Se uma linha não consiste somente de zeros, então a primeira entrada não nula é 1. Esse número 1 é denominado **pivô**.

2. Se existem linhas constituídas somente de zeros, então essas estão agrupadas nas linhas inferiores da matriz.
3. Quaisquer duas linhas consecutivas que não consistem somente de zeros, o pivô da linha inferior está mais à direita do que o pivô da linha superior.

Adicionalmente, se satisfazer a condição seguinte, então diremos que a matriz está na forma escalonada reduzida:

4. Cada coluna que contém um pivô, contém 0 nas demais entradas dessa coluna.

Exemplos.

(a) Estão na forma escalonada reduzida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Estão na forma escalonada, mas não-reduzida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Não estão na forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -12 \\ 2 & 4 & -10 & 2 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A ideia é aplicar operações elementares para transformar uma matriz aumentada numa matriz escalonada. Existe um método sistemático para isso.