MAT0364/MAT6643 TEORIA DE GALOIS (2021)

PROVA 2

Recomendações para a submissão da prova:

I. envie um único arquivo PDF contendo todos os exercícios, e com as páginas tendo tamanho A4 (ou qualquer tamanho próximo de A4),

II. ~~enumere as páginas, e no início de cada página, inclua seu NUSP. Na primeira página, coloque nome e email~~,

III. os exercícios podem ser feitos em qualquer ordem, e pode conter um ou mais exercícios por página.

IV. Permitido: arquivo gerado usando mesa digitalizadora, papel escrito a mão e escaneado, foto de papel escrito a mão, latex, etc...

Parte 1

Instruções. A Parte 1 tem peso 10%. Para essa parte da prova, siga os seguintes passos:
Passo 1. Resolva todos os itens *sem consulta*.
Passo 2. Confira suas respostas com alguma referência.
Passo 3. Se não estiverem corretas, então recomece, voltando para o passo 1.

(1) Enuncie o Teorema Fundamental da Teoria de Galois.

Parte 2

Instruções. Escolha 3 dentre os exercícios abaixo. Cada exercício tem peso 20%. Permitido consulta.

(1) Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão galoisiana finita em que $\operatorname{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ é um grupo abeliano. Prove que, dado qualquer corpo $\mathbb{K}$, com $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$, a extensão $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ é galoisiana.

(2) Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão separável de modo que existe n tal que $[\mathbb{F}(a) : \mathbb{F}] \leq n$, $\forall a \in \mathbb{E}$. Prove que $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é uma extensão finita, e que $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] \leq n$.

(3) Seja $\mathbb{F}$ um corpo finito e $n \in \mathbb{N}$. Prove que existe $f \in \mathbb{F}[X]$ irredutível de grau n.

(4) Fixe p um primo e $n \in \mathbb{N}$, e seja $S = \{f(X) \in \mathbb{F}_p[X] \text{ mônico e irredutível, } \operatorname{gr}(f) \text{ divide } n\}$. Prove que
$$\prod_{f(X) \in S} f(X) = X^{p^n} - X.$$

(5) Seja Φ_n o n-ésimo polinômio ciclotômico, para $n > 1$. Prove que
$$\Phi_n(1) = \begin{cases} p, & \text{se } n \text{ é uma potência de um primo } p, \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Parte 3

Instruções. Escolha 1 dentre os exercícios abaixo. Cada exercício tem peso 30%. Permitido consulta.

(1) Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão galoisiana finita, e $H \subseteq \operatorname{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ um subgrupo. Seja $\alpha \in \mathbb{E}$ satisfazendo a seguinte propriedade: para cada $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$, vale que
$$\sigma(\alpha) = \alpha \iff \sigma \in H.$$
Prove que $\mathbb{E}^H = \mathbb{F}(\alpha)$.

(2) Sejam $m > 2$, $\xi \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ uma m-ésima raiz primitiva da unidade, e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi + \xi^{-1})$.

(a) Calcule $\mathrm{Irr}(\xi, \mathbb{K})$,
(b) Seja $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\xi) = \xi^{-1}$. Mostre que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi)^{\langle \sigma \rangle}$.
(c) Prove que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{R}$.

(3) Sejam p primo, $n > 1$, e $q = p^n$. Sejam $\mathbb{F}_p$ e $\mathbb{F}_q$ os corpos finitos de p e q elementos, respectivamente. Seja $\alpha \in \mathbb{F}_q$ tal que $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$. Prove que

$$\mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{F}_p) = \prod_{j=0}^{n-1} (X - \alpha^{p^j}).$$

(4) Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0, que é uma extensão de grau 2 de $\mathbb{Q}$. Mostre que $\alpha \in \mathbb{K}$ é um inteiro algébrico se e só se $\mathrm{tr}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\alpha), \mathscr{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.