MAT0364/MAT6643 TEORIA DE GALOIS (2021)

PROVA 1

Recomendações para a submissão da prova:

I. envie um único arquivo PDF contendo todos os exercícios, e com as páginas tendo tamanho A4 (ou qualquer tamanho próximo de A4),
II. enumere as páginas, e no início de cada página, inclusa seu NUSP. Na primeira página, coloque nome e email,
III. os exercícios podem ser feitos em qualquer ordem, e pode conter um ou mais exercícios por página.
IV. Permitido: arquivo gerado usando mesa digitalizadora, papel escrito a mão e escaneado, foto de papel escrito a mão, latex, etc...

Parte 1

Instruções. A Parte 1 tem peso 10%. Para essa parte da prova, siga os seguintes passos:
Passo 1. Resolva todos os itens *sem consulta*.
Passo 2. Confira suas respostas com alguma referência.
Passo 3. Se não estiverem corretas, então recomece, voltando para o passo 1.

(1) Defina extensão algébrica, extensão separável, e extensão normal.
(2) Defina fecho algébrico de um corpo.
(3) Enuncie a relação entre os graus da extensão de $\mathbb{L}/\mathbb{E}/\mathbb{F}$, isto é, a relação entre os graus $[\mathbb{L} : \mathbb{E}]$, $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$, e $[\mathbb{L} : \mathbb{F}]$.

Parte 2

Instruções. Escolha 3 dentre os exercícios abaixo (que foram sorteados da Lista da P1). Cada exercício tem peso 20%. Permitido consulta.

(1) Seja $\mathbb{E} = \mathbb{F}(u)$, de modo que $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$ é ímpar. Prove que $\mathbb{E} = \mathbb{F}(u^2)$.
(2) Sejam $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos, e $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ corpos de modo que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}_i \subseteq \mathbb{K}$. Assuma que $[\mathbb{E}_i : \mathbb{F}] < \infty$, para $i = 1, 2$. Seja $\mathbb{E}$ o subcorpo de $\mathbb{K}$ gerado por $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$ (isto é, o menor subcorpo de $\mathbb{K}$ contendo $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$). Prove que $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] \leq [\mathbb{E}_1 : \mathbb{F}][\mathbb{E}_2 : \mathbb{F}]$.
(3) Seja $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots)$ o subcorpo de $\mathbb{C}$ gerado por $\mathbb{Q}$ e as raízes quadradas de todos os números primos positivos.
   (a) Prove que $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ é uma extensão algébrica.
   (b) Mostre que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \cdots$ é uma cadeia ascendente própria de subcorpos de $\mathbb{C}$. Conclua que $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ é uma extensão infinita.
(4) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $f \in \mathbb{F}[X]$ de grau $n \geq 1$. Seja $\mathbb{L}$ um corpo de raízes de f sobre $\mathbb{F}$. Prove que $[\mathbb{L} : \mathbb{F}]$ divide $n!$
(5) Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica. Prove:
   (a) $\mathbb{F}$ é perfeito se, e somente se, $\mathbb{E}$ é perfeito e $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é separável.
   (b) Suponha que $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é finita. Então $\mathbb{F}$ é perfeito se, e somente se, $\mathbb{E}$ é perfeito.
   (c) Indique um corpo imperfeito $\mathbb{F}$ e uma extensão algébrica $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ tal que $\mathbb{E}$ seja perfeito.

Parte 3

Instruções. Escolha 1 dentre os exercícios abaixo. Cada exercício tem peso 30%. Permitido consulta.

(1) Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica de corpos. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes:
   (a) $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é normal e separável,
   (b) existe $S \subseteq \mathbb{F}[X]$ um conjunto de polinômios *separáveis* tal que $\mathbb{E}$ é o corpo de raízes de S sobre $\mathbb{F}$.

(2) Seja $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ uma extensão normal. Seja $f \in \mathbb{F}[X]$ um polinômio mônico e irredutível em $\mathbb{F}[X]$, e seja $f = f_1 \cdots f_m$, com $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{L}[X]$, a sua decomposição em produto de polinômios mônicos e irredutíveis em $\mathbb{L}[X]$. Então

$$\{f_1, \ldots, f_m\} = \{f_1^\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})\}.$$

(3) Prove que existem corpos $\mathbb{F}$ e $\mathbb{E}$, com $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$, satisfazendo:
   (a) a extensão $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é finita,
   (b) existem infinitos corpos entre $\mathbb{F}$ e $\mathbb{E}$.