MAT0364/MAT6643 - Teoria de Galois (2021)

Lista 2

(1) Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica de corpos, e assuma que todo polinômio $f(X) \in \mathbb{F}[X]$ se fatora completamente em polinômios de grau 1 em $\mathbb{E}[X]$. Prove que $\mathbb{E}$ é algebricamente fechado.

(2) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $\mathscr{F} = \{\mathbb{E}_\alpha \mid \mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de corpos de modo que, dados $\mathbb{E}_\alpha, \mathbb{E}_\beta \in \mathscr{F}$, existe $\mathbb{E}_\gamma \in \mathscr{F}$ satisfazendo $\mathbb{E}_\alpha, \mathbb{E}_\beta \subseteq \mathbb{E}_\gamma$. Seja $\mathbb{L} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathbb{E}_\alpha$.
  (a) Prove que $\mathbb{L}$ é corpo.
  (b) Prove ou encontre um contra-exemplo: se cada $\mathbb{E}_\alpha/\mathbb{F}$ é uma extensão de corpos *finita*, então $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ é extensão de corpos *finita*.
  (c) No item anterior, troque *finita* por: *algébrica*, *separável*, e *normal*.

(3) Construa um corpo de raízes de $f = X^3 + X + 1$ sobre $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(4) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $f \in \mathbb{F}[X]$ de grau $n \geq 1$. Seja $\mathbb{L}$ um corpo de raízes de f sobre $\mathbb{F}$. Prove que $[\mathbb{L} : \mathbb{F}]$ divide $n!$

(5) Seja $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ uma extensão normal e Ω um corpo contendo $\mathbb{L}$. Então, para qualquer $T \subseteq \Omega$, a extensão $\mathbb{L}(T)/\mathbb{F}(T)$ é normal.

(6) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^4 = 5$.
  (a) Prove que $\mathbb{Q}(i\alpha^2)/\mathbb{Q}$ é normal.
  (b) Prove que $\mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)/\mathbb{Q}(i\alpha^2)$ é normal.
  (c) Prove que $\mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)/\mathbb{Q}$ não é normal.

(7) Para cada um dos polinômios abaixo, encontre $\mathbb{L}$, o seu corpo de raízes sobre $\mathbb{Q}$, e determine $[\mathbb{L} : \mathbb{F}]$.
  (a) $X^2 - 1$
  (b) $X^3 - 3$
  (c) $(X^3 - 2)(X^2 - 2)$
  (d) $X^2 + X + 1$
  (e) $X^6 + X^3 + 1$

(8) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $f \in \mathbb{F}[X]$. Prove que $f' = 0$ se e só se vale um entre:
  (a) ou $\operatorname{car} \mathbb{F} = 0$ e $f \in \mathbb{F}$,
  (b) ou $\operatorname{car} \mathbb{F} = p > 0$ e $f(X) = g(X^p)$, para algum $g(X) \in \mathbb{F}[X]$.

(9) Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero e $f \in \mathbb{F}[X]$ um polinômio mônico de grau positivo. Sejam $d(X) = \operatorname{mdc}(f(X), f'(X))$, e $g(X) = f(X)/d(X)$. Então f e g possuem as mesmas raízes, e todas as raízes de g são simples.

(10) Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica $p > 0$. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão finita, e assuma que p não divide $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$. Prove que $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é uma extensão separável.

(11) Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ extensão de corpos, com $\operatorname{car} \mathbb{F} = p > 0$, e $a \in \mathbb{E}$ algébrico sobre $\mathbb{F}$. Mostre que a é separável sobre $\mathbb{F}$ se, e somente se, $\mathbb{F}(a) = \mathbb{F}(a^{p^m})$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

(12) Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica. Prove:

(a) $\mathbb{F}$ é perfeito se, e somente se, $\mathbb{E}$ é perfeito e $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é separável.
(b) Suponha que $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é finita. Então $\mathbb{F}$ é perfeito se, e somente se, $\mathbb{E}$ é perfeito.
(c) Indique um corpo imperfeito $\mathbb{F}$ e uma extensão algébrica $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ tal que $\mathbb{E}$ seja perfeito.

(13) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo de característica $p > 0$, e $\mathbb{L} = \mathbb{F}(X, Y)$ o corpo de frações do anel de polinômios sobre $\mathbb{F}$ em duas variáveis. Seja $\mathbb{E} = \mathbb{F}(X^p, Y^p) \subseteq \mathbb{L}$, a extensão de $\mathbb{F}$ pelos elementos X^p e Y^p. Prove que:
(a) $\mathbb{L}/\mathbb{E}$ é uma extensão de grau p^2,
(b) $[\mathbb{E}(\zeta) : \mathbb{E}] = p$, para qualquer $\zeta \in \mathbb{L}$.
(c) Conclua que $\mathbb{L}/\mathbb{E}$ não possui nenhum elemento primitivo.

(14) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, $f \in \mathbb{F}[X]$ irredutível sobre $\mathbb{F}$, e $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão normal e finita. Sejam $f_1, f_2 \in \mathbb{E}[X]$ componentes mônicos e irredutíveis de f. Prove que existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ tal que $f_2 = f_1^\sigma$.