# MAT0364/MAT6643 - Teoria de Galois (2021)

Lista 0

(1) Fatore o polinômio $f(X) = X^4 - 4$ em produto de polinômios mônicos irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$, sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$.

(2) Seja $f \in \mathbb{Z}[X]$ um polinômio e $p$ um primo não dividindo o coeficiente líder de $f$. Prove que se $f$ é irredutível em $\mathbb{F}_p[X]$, então $f$ é irredutível em $\cancel{\mathbb{Z}[X]}$. $\mathbb{Q}[X]$.

(3) Seja $r = \frac{p}{q}$ uma raiz de $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, em que $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Prove que $p$ divide $a_0$ e $q$ divide $a_n$.

(4) Seja $f \in \mathbb{Z}[X]$ um polinômio mônico de grau $\geq 1$. Então cada fator mônico de $f$ em $\mathbb{Q}[X]$ está em $\mathbb{Z}[X]$.

(5) Demonstre (ou leia uma demonstração): Se $f \in \mathbb{Z}[X]$ é irredutível em $\mathbb{Z}[X]$, então $f$ também é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$.

(6) Enuncie e demonstre (ou leia uma demonstração) do critério de irredutibilidade de Eisenstein para polinômios em $\mathbb{Z}[X]$.

(7) Prove que o polinômio $f$ é irredutível sobre $\mathbb{F}$, em que:
   (a) $f = X^2 + 1$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,
   (b) $f = X^3 - 3X + 3$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$,
   (c) $f = X^2 + X + 1$, $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
   (d) $f = X^3 - 9$, $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$,
   (e) $f = X^4 + X + 1$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

(8) Seja $p$ um primo ímpar. Considere o polinômio
$$\Phi_p = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X].$$
Prove que $\Phi_p$ é irredutível em $\mathbb{Q}[X]$.
(Dica: defina $g(X) := \Phi_p(X+1)$, e escreva $g(X) = X^{p-1} + a_{p-2}X^{p-2} + \cdots + a_1 X + a_0$. Mostre que $p$ divide $a_i$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, p-2$, e que $a_0 = p$.)

(9) Seja $\mathbb{F}$ um corpo e sejam $f$ e $g$ dois polinômios mônicos irredutíveis em $\mathbb{F}[X]$. Mostre que, se $f$ divide $g$, então $f = g$.

(10) Seja $\mathcal{R}$ um anel com unidade. Se $I \subseteq \mathcal{R}$ é um ideal próprio (isto é, $I \neq \mathcal{R}$), prove, usando o Lema de Zorn, que $I$ está contido num ideal maximal de $\mathcal{R}$.

(11) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{F}[X]$. Lembre-se que a derivada formal é definida por
$$f'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1.$$
Prove que
$$(f(X)g(X))' = f'(X)g(X) + f(X)g'(X).$$