5. Extensão Normal (Parte II)

Já vimos que a extensão de corpos $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ não é normal. Isso se deve ao fato de que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ não contém todas as raízes de X^3-2 (o polinômio minimal de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$). Então, é razoável pensar que podemos obter uma extensão normal se considerarmos um corpo contendo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ e as demais raízes de X^3-2. De fato, tal corpo é uma extensão normal porque a construção coincide com o corpo de raízes de X^3-2 sobre $\mathbb{Q}$. Provaremos que a tal construção pode ser feita para uma extensão algébrica qualquer.

Proposição 5.1. *Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica de corpos, e Ω um corpo algebricamente fechado contendo $\mathbb{E}$. Seja*

$$\mathscr{N} = \{\mathbb{K} \mid \mathbb{E} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \Omega,\ \mathbb{L}/\mathbb{F} \text{ é extensão normal}\}.$$

Então $\mathbb{L} := \bigcap_{\mathbb{K}\in\mathscr{N}} \mathbb{K}$ é um corpo e $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ é uma extensão normal.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{L}$. Assim, $a \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{K} \in \mathscr{N}$. Sendo cada $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ normal, vale que $\mathscr{R}(\mathrm{Irr}(a,\mathbb{F})) \subseteq \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{K} \in \mathscr{N}$. Portanto, $\mathscr{R}(\mathrm{Irr}(a,\mathbb{F})) \subseteq \mathbb{L}$. Daí, $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ é normal. □

Assim, o corpo construído na proposição anterior é o menor corpo contendo $\mathbb{E}$ de modo que é uma extensão normal de $\mathbb{F}$. Provamos então a existência do fecho normal, definido a seguir:

Definição 5.2. Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica, e Ω um corpo algebricamente fechado contendo $\mathbb{E}$. O *fecho normal* da extensão $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ (em Ω) é o menor subcorpo $\mathbb{L} \subseteq \Omega$ contendo $\mathbb{E}$ de modo que $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ é extensão normal. Denota-se tal corpo por $N_\Omega(\mathbb{E}/\mathbb{F})$.

Note que o fecho normal é relativo a uma extensão de corpos, e não a um corpo. Ainda, por definição, vale que $\mathbb{E} \subseteq N_\Omega(\mathbb{E}/\mathbb{F})$, e

$$N_\Omega\left(N_\Omega(\mathbb{E}/\mathbb{F})/\mathbb{F}\right) = N_\Omega(\mathbb{E}/\mathbb{F}).$$

Assim, o fecho normal é uma operação de fecho.

O fecho normal pode ser caracterizado da seguinte forma:

Proposição 5.3. *Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica.*

(i) *Seja $\mathscr{S} = \{\mathrm{Irr}(a,\mathbb{F}) \mid a \in \mathbb{E}\}$. O fecho normal de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é o corpo de raízes de $\mathscr{S}$ sobre $\mathbb{F}$.*

(ii) *Assuma que $\mathbb{E} = \mathbb{F}(a_1, \ldots, a_m)$ é finita. Então, o fecho normal de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é o corpo de raízes de $\{\mathrm{Irr}(a_1,\mathbb{F}), \ldots, \mathrm{Irr}(a_m,\mathbb{F})\}$ sobre $\mathbb{F}$.*

Demonstração. (i) Sejam $\mathbb{L}$ o fecho normal de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, e $a \in \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$. Portanto, $\mathbb{L} \supseteq \mathscr{R}(\mathrm{Irr}(a,\mathbb{F}))$. Assim, $\mathbb{L}$ contém o corpo de raízes de $\mathscr{S}$ sobre $\mathbb{F}$. Por outro lado, $\mathbb{F}(\mathscr{R}(\mathscr{S}))$ é uma extensão normal de $\mathbb{F}$. Por construção, o mesmo contém $\mathbb{E}$. Assim, como $\mathbb{L}$ é a menor extensão normal de $\mathbb{F}$ contendo $\mathbb{E}$, segue que $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{F}(\mathscr{R}(\mathscr{S}))$. Portanto, vale a igualdade.
(ii) Segue os mesmos passos de (i) (exercício). □

Para o resto desta seção, assuma que $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica de corpos, e Ω é um corpo algebricamente fechado contendo $\mathbb{E}$.

Definição 5.4. Denota-se

$$\begin{aligned}\mathrm{Mono}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E},\Omega) &= \{\mathbb{F}\text{-monomorfismo } \mathbb{E}\to\Omega\},\\ \mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F}) &= \{\mathbb{F}\text{-automorfismo de } \mathbb{E}\}.\end{aligned}$$

Alguns autores adotam a notação $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{F}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$, e denominam de o *grupo de Galois* da extensão $\mathbb{E}/\mathbb{F}$.

Munido da composição de funções, $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ é um grupo.

Uma vez que $\mathbb{E}\subseteq\Omega$, temos o mapa identidade $\mathbb{E}\to\Omega$. Assim, a composição de um $\mathbb{F}$-automorfismo de $\mathbb{E}$ com a tal inclusão é um $\mathbb{F}$-monomorfismo $\mathbb{E}\to\Omega$. Portanto, podemos ver $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})\subseteq\mathrm{Mono}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E},\Omega)$. Reciprocamente, se $\sigma\in\mathrm{Mono}_{\mathbb{F}}(\mathbb{E},\Omega)$ é tal que $\mathrm{Im}\,\sigma=\mathbb{E}$, então σ é um $\mathbb{F}$-automorfismo de $\mathbb{E}$. Daí, um tal σ pode ser visto como um elemento de $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$. Mas, em geral, os dois conjuntos não coincidem. Entretanto, as extensões normais são caracterizadas como sendo as extensões em que valem a coincidência dos conjuntos. Já demonstramos tal fato (Teorema 4.7, equivalências (i) e (iv)):

Teorema 5.5. *Sejam $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica de corpos, e Ω um corpo algebricamente fechado contendo $\mathbb{L}$. Então $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ é normal se, e somente se,* $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) = \mathrm{Mono}_{\mathbb{F}}(\mathbb{L},\Omega)$. □

O próximo resultado será importante para nossas construções futuras:

Teorema 5.6. *Seja $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ uma extensão normal. Seja $\mathbb{K}$ um corpo intermediário, isto é, $\mathbb{L}/\mathbb{K}/\mathbb{F}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$\mathbb{K}/\mathbb{F}$ é uma extensão normal,*
(ii) *$\sigma\mathbb{K}\subseteq\mathbb{K}$, $\forall\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})$.*

Neste caso, temos um homomorfismo de grupos sobrejetor $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})\to\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ *dada por restrição. O seu núcleo é* $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$.

Demonstração. $(i)\Rightarrow(ii)$: Seja $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})$. Então podemos ver σ como sendo um $\mathbb{F}$-monomorfismo $\mathbb{L}\to\Omega$. Como $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ é normal, segue que $\sigma(\mathbb{K})=\mathbb{K}$.
$(ii)\Rightarrow(i)$: Seja $\sigma_0:\mathbb{K}\to\Omega$ um monomorfismo de corpos. Como a extensão $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ é algébrica, existe uma extensão $\sigma:\mathbb{L}\to\Omega$ de σ_0. Como $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ é normal, vale que $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})$. O item (ii) implica que $\sigma(\mathbb{K})\subseteq\mathbb{K}$. Entretanto, σ restrita a $\mathbb{K}$ coincide com σ_0. Portanto, $\sigma_0(\mathbb{K})=\mathbb{K}$. Isso implica que $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ é normal.

Agora, pela caracterização (ii), o mapa $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})\to\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ é um homomorfismo de grupos bem definido. Seja $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})$ tal que a sua restrição $\sigma|_{\mathbb{K}}$ é a identidade de $\mathbb{K}$. Então, $\sigma(a)=a$, $\forall a\in\mathbb{K}$. Isso implica que $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Por outro lado, todo $\sigma_0\in\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ admite uma extensão $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})$. Como $\sigma_0=\sigma|_{\mathbb{K}}$, temos que o homomorfismo é sobrejetor. □

Exemplo 5.1. A seguir, exibiremos alguns exemplos de grupo de Galois de alguma extensão, isto é, do grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{F})$.

(1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}/\mathbb{F})=\{1\}$.
(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q})=\{1,\sigma_i\}$, em que $\sigma_i(a+bi)=a-bi$ é a conjugação complexa.
(3) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})=\{1,\sigma\}$, em que $\sigma(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$.
(4) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})=\{1\}$. Isso porque um monomorfismo $\psi:\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\to\mathbb{C}$ é tal que $\psi(\sqrt[3]{2})\in\{\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\xi,\sqrt[3]{2}\xi^2\}$, em que $\xi\neq\xi^3=1$. Assim, existe um único monomorfismo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\to\mathbb{C}$ cuja imagem coincide com o próprio $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Portanto, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ possui um único elemento.

5.1. **Exercícios e Revisão (para trabalharmos na quarta).**

(1) Exercícios (6), (10), (17) da Lista 1.

(2) Sejam $\mathbb{L}/\mathbb{E}/\mathbb{F}$ extensão de corpos e $a \in \mathbb{L}$. Prove que $\operatorname{Irr}(a, \mathbb{E})$ divide $\operatorname{Irr}(a, \mathbb{F})$.

(3) Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos e Ω um corpo algebricamente fechado contendo $\mathbb{E}$. Seja $\sigma : \mathbb{E} \to \Omega$ um $\mathbb{F}$-endomorfismo de modo que $\operatorname{Im} \sigma \subseteq \mathbb{E}$. Prove que $\operatorname{Im} \sigma = \mathbb{E}$, e portanto, σ é um $\mathbb{F}$-automorfismo de $\mathbb{E}$.