3. Corpos algebricamente fechados

Começamos provando as seguintes equivalências:

Teorema 3.1. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *todo polinômio em $\mathbb{F}[X]$ de grau não nulo possui (pelo menos) uma raiz em $\mathbb{F}$,*
(ii) *todo polinômio em $\mathbb{F}[X]$ se fatora como produto de polinômios de grau 1,*
(iii) *os polinômios irredutíveis de $\mathbb{F}[X]$ possuem grau 1,*
(iv) *se $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica, então $\mathbb{E} = \mathbb{F}$,*
(v) *se $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é uma extensão finita, então $\mathbb{E} = \mathbb{F}$.*

Demonstração. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Seja $f \in \mathbb{F}[X]$, com $\text{gr}(f) > 0$. Então, de (i), f admite uma raiz $\alpha \in \mathbb{F}$. Segue que $f = (X - \alpha)g(X)$, com $\text{gr}(g) < \text{gr}(f)$. Por indução no grau do polinômio, segue que g é produto de polinômios de grau 1. Portanto, f é produto de polinômios de grau 1.
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Seja $f \in \mathbb{F}[X]$ um polinômio irredutível. Então, de (ii), segue que $f = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_m)$. Como f é irredutível, necessariamente $m = 1$, e portanto, $\text{gr}(f) = 1$.
(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*: Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica. Seja $a \in \mathbb{E}$, e p o seu polinômio minimal sobre $\mathbb{F}$. Por (iii), segue que $\text{gr}(p) = 1$. Portanto, $a \in \mathbb{F}$, e então, $\mathbb{E} = \mathbb{F}$.
(iv) $\Rightarrow$ *(v)*: Se $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é uma extensão finita, então é também uma extensão algébrica. Portanto, de (iv), obtemos que $\mathbb{E} = \mathbb{F}$.
(v) $\Rightarrow$ *(i)*: Seja $f \in \mathbb{F}[X]$ com $\text{gr}(f) > 0$. Então, do Teorema 1.10, existe uma extensão de corpos finita $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ de modo que $f(a) = 0$ para algum $a \in \mathbb{E}$. Mas, de (v), segue que $\mathbb{F} = \mathbb{E} \ni a$. Portanto, f admite raiz em $\mathbb{F}$. □

Definição 3.2. Dizemos que $\mathbb{F}$ é um corpo *algebricamente fechado* se satisfaz uma das condições do teorema anterior (e portanto, satisfaz todas as condições).

Exemplo 3.1. $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado. Esse fato é conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra.

Definição 3.3. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Dizemos que $\mathbb{E}$ é um *fecho algébrico* de $\mathbb{F}$ se:

(i) a extensão $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é algébrica,
(ii) $\mathbb{E}$ é um corpo algebricamente fechado.

Provaremos primeiro que, se já sabemos que existe um corpo que é algebricamente fechado Ω contendo $\mathbb{F}$, então um fecho algébrico de $\mathbb{F}$ pode ser tomado como sendo um subcorpo de Ω.

Proposição 3.4. *Seja $\Omega/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Se Ω é algebricamente fechado, então o fecho de $\mathbb{F}$ em Ω é algebricamente fechado.*

Demonstração. Seja $\mathbb{E} = \{a \in \Omega \mid a \text{ é algébrico sobre } \mathbb{F}\}$. Já vimos que $\mathbb{E}$ é um corpo contendo $\mathbb{F}$, e $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica de corpos (Teorema 2.8). Assim, basta mostrarmos que $\mathbb{E}$ é um corpo algebricamente fechado. Seja $f \in \mathbb{E}[X]$ um polinômio de grau não nulo. Então $f \in \Omega[X]$, e portanto, admite uma raiz $a \in \Omega$. Como a satisfaz um polinômio em $\mathbb{E}[X]$, segue que a é algébrico sobre $\mathbb{E}$. Mas então, do Teorema 2.7, segue que a é algébrico sobre $\mathbb{F}$. Assim, da construção, obtemos que $a \in \mathbb{E}$. Portanto, f admite uma raiz em $\mathbb{E}$. Então, $\mathbb{E}$ é um corpo algebricamente fechado. □

Exemplo 3.2. $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C}$ algébrico sobre $\mathbb{Q}\}$ é um corpo algebricamente fechado. Portanto, $\mathbb{A}$ é um fecho algébrico de $\mathbb{Q}$.

Utilizando o Lema de Zorn, provaremos a seguir que todo corpo admite um fecho algébrico, independente da existência de um corpo algebricamente fechado maior.

Teorema 3.5. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Então $\mathbb{F}$ admite um fecho algébrico.*

Demonstração. Seja

$$\mathscr{F} = \{\mathbb{E} \text{ corpo} \mid \mathbb{F} \subseteq \mathbb{E} \text{ e } \mathbb{E}/\mathbb{F} \text{ é extensão algébrica}\},$$

ordenado por inclusão. A família $\mathscr{F}$ é não vazia, pois $\mathbb{F} \in \mathscr{F}$. Seja $\mathscr{C}$ uma cadeia em $\mathscr{F}$. Provaremos que $\mathscr{C}$ admite uma cota superior em $\mathscr{F}$. Para isso, seja $\mathbb{L} = \bigcup_{\mathbb{E}_i \in \mathscr{C}} \mathbb{E}_i$. Então, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}$ por construção. Além disso, dados $0 \neq a, b \in \mathbb{L}$, existem $\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_j \in \mathscr{C}$ tais que $a \in \mathbb{E}_i$ e $b \in \mathbb{E}_j$. Sendo $\mathscr{C}$ uma cadeia, segue que $\mathbb{E}_i \subseteq \mathbb{E}_j$ ou $\mathbb{E}_j \subseteq \mathbb{E}_i$. Podemos então supor, a menos de troca de índices, que $\mathbb{E}_i \subseteq \mathbb{E}_j$. Então, vale que $a, b \in \mathbb{E}_j$. Como $\mathbb{E}_j$ é um corpo, segue que $a - b, ab, a^{-1} \in \mathbb{E}_j \subseteq \mathbb{L}$. Portanto, $\mathbb{L}$ é um corpo. Ainda, como $\mathbb{E}_j/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica, segue que a é algébrico sobre $\mathbb{F}$. Daí, $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica. Concluímos que $\mathbb{L} \in \mathscr{F}$. Além disso, por construção, $\mathbb{E}_i \subseteq \mathbb{L}$, para todo $\mathbb{E}_i \in \mathscr{C}$. Provamos então que a cadeia $\mathscr{C}$ admite uma cota superior em $\mathscr{F}$. Portanto, por Lema de Zorn, existe um elemento maximal $\bar{\mathbb{F}} \in \mathscr{F}$. Isso implica, em particular, que $\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica. Concluiremos o teorema se mostrarmos que $\bar{\mathbb{F}}$ é um corpo algebricamente fechado. Seja então $\mathbb{M}/\bar{\mathbb{F}}$ uma extensão algébrica. Do Teorema 2.7, segue que $\mathbb{M}/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica. Da maximalidade de $\bar{\mathbb{F}}$, segue que $\mathbb{M} = \bar{\mathbb{F}}$. Portanto, provamos que $\bar{\mathbb{F}}$ satisfaz a condição (iv) do Teorema 3.1, e então $\bar{\mathbb{F}}$ é um corpo algebricamente fechado. $\square$

Nosso próximo passo é garantir a unicidade de um fecho algébrico, a menos de um isomorfismo. Para isso, provaremos um resultado sobre extensão de monomorfismo de corpos, que será útil posteriormente.

Proposição 3.6. *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, Ω um corpo algebricamente fechado e $\varphi_0 : \mathbb{F} \to \Omega$ um monomorfismo de corpos. Seja $\mathbb{E} = \mathbb{F}(a)$ uma extensão de corpos algébrica e simples, e seja p_a o polinômio minimal de a sobre $\mathbb{F}$. Então, para cada raiz $\omega \in \Omega$ de $\varphi_0(p_a)$, existe um único homomorfismo de anéis $\varphi : \mathbb{E} \to \Omega$ que estende φ_0 e que satisfaz $\varphi(a) = \omega$. Todo homomorfismo $\mathbb{E} \to \Omega$ que estende φ_0 é construído dessa forma.*

Demonstração. Temos um isomorfismo $\mathbb{E} \cong \mathbb{F}[X]/(p_a)$, de modo que $a \mapsto X + (p_a)$. Seja $\omega \in \Omega$ uma raiz de $\varphi_0(p_a)$. Defina $\psi_\omega : \mathbb{F}[X] \to \Omega$ via $\psi_\omega(f(X)) = \varphi_0(f)(\omega)$, isto é,

$$\psi_\omega(\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n) = \varphi_0(\alpha_0) + \varphi_0(\alpha_1)\omega + \cdots + \varphi_0(\alpha_n)\omega^n.$$

Como ω é raiz de $\varphi_0(p_a)$, temos que $\ker \psi_\omega \supseteq (p_a)$. Sendo $\psi_\omega \neq 0$ e (p_a) um ideal maximal de $\mathbb{F}[X]$, vale que $\ker \psi_\omega = (p_a)$. Assim, ψ_ω se fatora em

$$\mathbb{F}[X] \longrightarrow \mathbb{F}[X]/(p_a) \xrightarrow{\psi'_\omega} \Omega.$$

Seja $\varphi : \mathbb{E} \to \Omega$ a composição de ψ'_ω com o isomorfismo $\mathbb{E} \to \mathbb{F}[X]/(p_a)$. Então, por construção, vale que

$$\varphi(a) = \psi'_\omega(X + (p_a)) = \psi_\omega(X) = \omega,$$
$$\varphi(\alpha) = \psi'_\omega(\alpha) = \varphi_0(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}.$$

Portanto, $\varphi : \mathbb{E} \to \Omega$ é o monomorfismo de corpos requerido. A unicidade vale, pois seja $\varphi' : \mathbb{E} \to \Omega$ um monomorfismo que estende φ_0 e satisfaz $\varphi'(a) = \omega$. Seja $b \in \mathbb{E} = \mathbb{F}(a)$. Então, podemos escrever $b = \beta_0 + \beta_1 a + \cdots + \beta_s a^s$, $\beta_0, \ldots, \beta_s \in \mathbb{F}$. Daí

$$\varphi'(b) = \sum_{i=0}^{s} \varphi'(\beta_i)\varphi'(a^i) = \sum_{i=0}^{s} \varphi_0(\beta_i)\omega^i = \varphi(b).$$

Portanto, $\varphi' = \varphi$.

Agora, seja $\varphi'' : \mathbb{E} \to \Omega$ um monomorfismo de corpos que estende φ_0. Basta provarmos que $\omega' := \varphi''(a)$ é raiz de $\varphi_0(p_a)$. De fato, escreva $p_a = \gamma_0 + \gamma_1 X + \cdots + \gamma_m X^m$. Então

$$\begin{aligned}\varphi_0(p_a)(\omega') &= \varphi_0(\gamma_0) + \varphi_0(\gamma_1)\omega' + \cdots + \varphi_0(\gamma_m)\omega'^m \\ &= \varphi''(\gamma_0 + \gamma_1 a + \cdots + \gamma_m a^m) = \varphi''(0) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, φ'' é construído como a única extensão de φ_0 que satisfaz $\varphi''(a) = \omega'$. $\square$

Utilizando novamente o Lema de Zorn, podemos generalizar a proposição anterior no seguinte contexto:

Proposição 3.7. *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, Ω um corpo algebricamente fechado e $\varphi_0 : \mathbb{F} \to \Omega$ um monomorfismo de corpos. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão algébrica. Então existe um monomorfismo de corpos $\varphi : \mathbb{E} \to \Omega$ que é uma extensão de φ_0.*

Demonstração. Seja

$$\mathscr{F} = \{(\mathbb{E}_i, \varphi_i) \mid \mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}_i \subseteq \mathbb{E}, \text{ e } \varphi_i : \mathbb{E}_i \to \Omega \text{ estende } \varphi_0\}.$$

A família $\mathscr{F}$ é não vazia, pois $(\mathbb{F}, \varphi_0) \in \mathscr{F}$. Defina a ordem parcial em $\mathscr{F}$ da seguinte forma: $(\mathbb{E}_1, \varphi_1) \leq (\mathbb{E}_2, \varphi_2)$ se $\mathbb{E}_1 \subseteq \mathbb{E}_2$ e φ_2 estende φ_1. Seja $\mathscr{C} = \{(\mathbb{E}_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathscr{I}}$ uma cadeia em $\mathscr{F}$. Defina $\mathbb{L} = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} \mathbb{E}_i$. Então, por mesma ideia anterior, $\mathbb{L}$ é um corpo. Além disso, por construção, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \Omega$. Construa $\bar{\varphi} : \mathbb{L} \to \Omega$ da seguinte forma: dado $a \in \mathbb{L}$, seja $\mathbb{E}_i \ni a$. Então, defina $\bar{\varphi}(a) = \varphi_i(a)$. Tal construção está bem definida, pois se $a \in \mathbb{E}_i$ e $a \in \mathbb{E}_j$, então sendo $\mathscr{C}$ uma cadeia, vale que $(\mathbb{E}_i, \varphi_i) \leq (\mathbb{E}_j, \varphi_j)$ (a menos de trocar os índices). Portanto, $\mathbb{E}_i \subseteq \mathbb{E}_j$, e φ_j estende φ_i. Isso implica que $\varphi_i(a) = \varphi_j(a)$. Agora, dados $a, b \in \mathbb{L}$, existe $\mathbb{E}_i \ni a, b$ (pois $\mathscr{C}$ é cadeia). Então

$$\begin{aligned}&\bar{\varphi}(a+b) = \varphi_i(a+b) = \varphi_i(a) + \varphi_i(b) = \bar{\varphi}(a) + \bar{\varphi}(b), \\ &\bar{\varphi}(ab) = \varphi_i(ab) = \varphi_i(a)\varphi_i(b) = \bar{\varphi}(a)\bar{\varphi}(b).\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\varphi}$ é um homomorfismo de anéis (e portanto, um monomorfismo de corpos). Por construção, $\bar{\varphi}$ estende φ_0. Assim, $(\mathbb{L}, \bar{\varphi}) \in \mathscr{F}$. Além disso, por construção, segue que $(\mathbb{E}_i, \varphi_i) \leq (\mathbb{L}, \bar{\varphi})$, $\forall (\mathbb{E}_i, \varphi_i) \in \mathscr{C}$. Segue que $\mathscr{C}$ admite cota superior em $\mathscr{F}$. Do Lema de Zorn, obtemos que $\mathscr{F}$ admite um elemento maximal $(\mathbb{M}, \varphi)$. Se $\mathbb{M} \neq \mathbb{E}$, então existe $a \in \mathbb{E}$, $a \notin \mathbb{M}$. Então $\mathbb{M}(a)$ á uma extensão própria de $\mathbb{M}$. Como $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é algébrica, segue que a é algébrico sobre $\mathbb{M}$. Da Proposição 3.6, exite $\varphi' : \mathbb{M}(a) \to \Omega$ que estende φ. Daí $(\mathbb{M}(a), \varphi') \in \mathscr{F}$ contradiz a maximalidade de $(\mathbb{M}, \varphi)$. Portanto, $\mathbb{M} = \mathbb{E}$ e $\varphi : \mathbb{E} \to \Omega$ estende $\varphi_0 : \mathbb{F} \to \Omega$. $\square$

Como consequência, prova-se que um fecho algébrico de um corpo é único, a menos de isomorfismo:

Corolário 3.8. *Quaisquer dois fechos algébricos de um mesmo corpo $\mathbb{F}$ são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $\bar{\mathbb{F}}_1$ e $\bar{\mathbb{F}}_2$ dois fechos algébricos de $\mathbb{F}$. Então existe monomorfismo de corpos $\iota_0 : \mathbb{F} \to \bar{\mathbb{F}}_2$. Como $\bar{\mathbb{F}}_1/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica, da Proposição 3.7, existe monomorfismo $\iota : \bar{\mathbb{F}}_1 \to \bar{\mathbb{F}}_2$ que estende ι_0. Portanto, temos extensão de corpos $\bar{\mathbb{F}}_2/\bar{\mathbb{F}}_1/\mathbb{F}$. Como $\bar{\mathbb{F}}_2/\mathbb{F}$ é uma extensão algébrica, segue que $\bar{\mathbb{F}}_2/\bar{\mathbb{F}}_1$ é uma extensão algébrica também. Sendo $\bar{\mathbb{F}}_1$ algebricamente fechado, segue que $\iota(\bar{\mathbb{F}}_1) = \bar{\mathbb{F}}_2$. Portanto, ι é um isomorfismo de corpos. $\square$