13. Extensão Transcendente

Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Relembre que dizemos que um elemento $t \in \mathbb{E}$ é transcendente sobre $\mathbb{F}$ se $\mathbb{F}[t] \cong \mathbb{F}[X]$.

Definição 13.1. Dizemos que uma extensão de corpos $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é *transcendente* se a extensão não é algébrica.

Então, uma extensão de corpos $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é transcendente se e só se existe (pelo menos) um elemento $t \in \mathbb{E}$ que é transcendente sobre $\mathbb{F}$.

Definição 13.2. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Dizemos que $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{E}$ são *algebricamente dependentes* sobre $\mathbb{F}$ se existe um polinômio não nulo $f \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_m]$ tal que $f(t_1, \ldots, t_m) = 0$. Dizemos que os mesmos são *algebricamente independentes* se não forem algebricamente dependentes.

Equivalentemente, pode-se caracterizar a propriedade de ser algebricamente independente da seguinte maneira. Dados $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{E}$, fica bem definido o mapa

$$\psi_{(t_1,\ldots,t_m)} : \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_m] \to \mathbb{E},$$

tal que $\psi_{(t_1,\ldots,t_m)} = f(t_1, \ldots, t_m)$. Dizemos que $t_1, \ldots, t_m$ são algebricamente independentes se $\psi_{(t_1,\ldots,t_m)}$ é um monomorfismo de anéis.

Definição 13.3. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Um conjunto $M \subseteq \mathbb{E}$ é dito ser *algebricamente independente* sobre $\mathbb{F}$ se, para todo subconjunto finito $\{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq M$, os elementos $t_1, \ldots, t_m$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{F}$.

Neste sentido, temos a seguinte propriedade de conjunto algebricamente independente:

Lema 13.4. *Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos e $M, N \subseteq \mathbb{E}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$M \cap N = \emptyset$ e $M \cup N$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$.*
(2) *M é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$, e N é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}(M)$.*

Demonstração. (i)$\Rightarrow$(ii): Como $M \subseteq M \cup N$, obtemos que M é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$. Assuma que N não é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}(M)$. Então, existem $t_1, \ldots, t_n \in N$ e $0 \neq f \in \mathbb{F}(M)[X_1, \ldots, X_n]$ tais que $f(t_1, \ldots, t_n) = 0$. Escreva

$$f = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_n)} \frac{\alpha_I}{\beta_I} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n},$$

em que $\alpha_I, \beta_i \in \mathbb{F}(M)$, e somente um número finito dos α_I é não nulo. Sejam $s_1, \ldots, s_m \in M$ todos os elementos que efetivamente aparecem em pelo menos um dos α_I ou β_I. Daí, $f \in \mathbb{F}(s_1, \ldots, s_m)[X_1, \ldots, X_n]$. Multiplicando por todos os β_I, podemos então assumir que $f \in \mathbb{F}[s_1, \ldots, s_m][X_1, \ldots, X_n]$. Portanto, obtemos que $\{s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n\} \subseteq M \cup N$ é algebricamente dependente sobre $\mathbb{F}$, uma contradição.

(ii)$\Rightarrow$(i): Assuma que existem $s_1, \ldots, s_m \in M$, $t_1, \ldots, t_n \in N$, e um polinômio $0 \neq f \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_{n+m}]$ tais que $f(s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n) = 0$. Se $n = 0$, então obtemos que M é algebricamente dependente sobre $\mathbb{F}$. Assuma então $n > 0$ e defina

$$g(X_1, \ldots, X_n) = f(s_1, \ldots, s_m, X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{F}(s_1, \ldots, s_m)[X_1, \ldots, X_n].$$

Então $g \neq 0$ e $g(t_1, \ldots, t_n) = 0$. Portanto, N é algebricamente dependente sobre $\mathbb{F}(M)$. $\square$

Como consequência, se N possui um único elemento, então o lema anterior pode ser enunciado da seguinte forma:

Lema 13.5. *Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos, $M \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$ e $t \in \mathbb{E}$, $t \notin M$. Então $M \cup \{t\}$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$ se, e somente se, t é transcendente sobre $\mathbb{F}(M)$.* $\square$

Definição 13.6. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Uma *base de transcendência* da extensão $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é um conjunto $M \subseteq \mathbb{E}$ algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$, tal que $\mathbb{E}/\mathbb{F}(M)$ é algébrica.

Observação. Seja M uma base de transcendência da extensão de corpos $\mathbb{E}/\mathbb{F}$. Então, o grau da extensão $[\mathbb{E} : \mathbb{F}(M)]$ não é um invariante. Por exemplo, seja $\mathbb{E} = \mathbb{F}(t)$, em que t é transcendente sobre $\mathbb{F}$. Então $M_1 = \{t\}$ e $M_2 = \{t^2\}$ são bases de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$. Porém, $[\mathbb{E} : \mathbb{F}(M_1)] = 1$ e $[\mathbb{E} : \mathbb{F}(M_2)] = 2$.

A família $\mathscr{M}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ dos subconjuntos de $\mathbb{E}$ que são algebricamente independentes sobre $\mathbb{F}$ é parcialmente ordenado via inclusão. Seja $M \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto algebricamente independente. Então, note que M é uma base de transcendência da extensão $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ se e só se M é um elemento maximal da família $\mathscr{M}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$.

Lema 13.7. *Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos, $M_0 \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto algebricamente independente, e $S \subseteq \mathbb{E}$ tal que $\mathbb{E}/\mathbb{F}(S)$ é uma extensão algébrica. Então, existe $S' \subseteq S$ tal que $S' \cap M_0 = \emptyset$ e $S' \cup M_0$ é uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$.*

Demonstração. Considere a família

$$\mathscr{M} = \{S_0 \subseteq S \mid \ S_0 \cap M_0 = \emptyset \text{ e } M_0 \cup S_0 \text{ é algebricamente independente}\}.$$

Sendo M_0 algebricamente independente, temos que $\emptyset \in \mathscr{M}$. Por Lema de Zorn (por que podemos aplicar?) existe um elemento maximal $S' \subseteq S$. Por construção, $S' \cap M_0 = \emptyset$. Se $S' \cup M_0$ não é uma base de transcendência, então existe $t \in \mathbb{E}$ que é transcendente sobre $\mathbb{F}(S' \cup M_0)$. Portanto, do Lema 13.5, $S' \cup \{t\} \in \mathscr{M}$, contradizendo a maximalidade de S'. $\square$

Como consequência, temos que qualquer conjunto algebricamente independente pode ser completada para uma base de transcendência:

Corolário 13.8. *Seja $S \subseteq \mathbb{E}$ um conjunto algebricamente independente. Então existe uma base de transcendência M de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ que contém S.* $\square$

Finalmente, mostraremos que a cardinalidade de uma base de transcendência finita é uma constante. Para isso, temos a seguinte observação:

Lema 13.9. *Sejam M uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, e $N \subseteq M$. Então $M \setminus N$ é uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}(N)$.*

Demonstração. Temos que $\mathbb{E}$ é algébrico sobre $\mathbb{F}(M) = \mathbb{F}(N)(M \setminus N)$. Além disso, do Lema 13.4, segue que $M \setminus N$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}(N)$. Portanto, $M \setminus N$ é uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}(N)$. $\square$

Teorema 13.10. *Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos que admite uma base de transcendência com $m < \infty$ elementos. Então toda base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ admite m elementos.*

Demonstração. Sejam M e S bases de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, em que M possui m elementos. Por simetria do argumento, basta mostrarmos que a cardinalidade de S é $\leq m$. A demonstração será feita por indução em m, com a base $m = 0$ sendo válida pelo Lema 13.5.

Seja $s \in S$. Então, do Lema 13.7, existe $M_0 \subseteq M$ tal que $M_0 \cap \{s\} = \emptyset$ e $M_0 \cup \{s\}$ é uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$. Como $s \notin M_0$ e s é algébrico sobre $\mathbb{F}(M)$, obtemos que $M_0 \neq M$, ou seja, $|M_0| \leq |M| - 1$. Por Lema 13.9, $S \setminus \{s\}$ e M_0 são bases de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}(s)$. Assim, por hipótese de indução, obtemos que

$$|S| - 1 = |S \setminus \{s\}| \leq |M_0| \leq |M| - 1.$$

Portanto, $|S| \leq m$. □

O teorema anterior garante que a seguinte definição de grau de transcendência está bem posto.

Definição 13.11. Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos, e $M \subseteq \mathbb{E}$ uma base de transcendência da extensão. Dizemos que o *grau de transcendência* de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é a cardinalidade de M, se a mesma for finita, e ∞ caso contrário. Denotamos o grau da transcendência da extensão por $\operatorname{gr}\operatorname{tr}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$.

Neste sentido, temos o seguinte resultado:

Corolário 13.12. *Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ um corpo com $\operatorname{gr}\operatorname{tr}(\mathbb{E}/\mathbb{F}) = r < \infty$.*

(i) *Todo conjunto de $\mathbb{E}$ que é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$ possui no máximo r elementos. Em particular, um conjunto algebricamente independente é uma base de transcendência se, e somente se, o conjunto possui r elementos.*

(ii) *Todo subconjunto $S \subseteq \mathbb{E}$ tal que $E/\mathbb{F}(S)$ é algébrica possui no mínimo r elementos. Em particular, S é uma base de transcendência se, e só se, S possui exatamente r elementos.* □

Lema 13.13. *Sejam $\mathbb{L}/\mathbb{E}/\mathbb{F}$ extensões de corpos, N uma base de transcendência de $\mathbb{L}/\mathbb{E}$, e M uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$. Então $M \cap N = \emptyset$ e $M \cup N$ é uma base de transcendência de $\mathbb{L}/\mathbb{F}$.*

Demonstração. Sendo $\mathbb{E}/\mathbb{F}(M)$ extensão de corpos e N algebricamente independente sobre $\mathbb{E}$, obtemos que N é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}(M)$. Daí, do Lema 13.4, $M \cup N$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$, e $M \cap N = \emptyset$. Agora, todo elemento de $\mathbb{E}$ é algébrico sobre $\mathbb{F}(M)$. Além disso, $\mathbb{E}(N) = \mathbb{F}(N)(\mathbb{E})$, e $\mathbb{F}(M \cup N) = \mathbb{F}(M)(N)$. Conclui-se que a extensão $\mathbb{E}(N)/\mathbb{F}(M \cup N)$ é algébrica. Como $\mathbb{L}/\mathbb{E}(N)$ e $\mathbb{E}(N)/\mathbb{F}(M \cup N)$ são algébricas, segue que $\mathbb{L}/\mathbb{F}(M \cup N)$ é algébrica. Portanto, $M \cup N$ é uma base de transcendência de $\mathbb{L}/\mathbb{F}$. □

Como consequência do teorema anterior, obtemos a seguinte propriedade aditiva do grau de transcendência.

Corolário 13.14. *Sejam $\mathbb{L}/\mathbb{E}/\mathbb{F}$ extensões de corpos. Então*

$$\operatorname{gr}\operatorname{tr}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) = \operatorname{gr}\operatorname{tr}(\mathbb{L}/\mathbb{E}) + \operatorname{gr}\operatorname{tr}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$$

Tal fórmula continua válida para graus de transcendência infinita. □