Extensão Transcendente

Dado $\mathbb{E}|\mathbb{F}$, relembre que $t \in \mathbb{E}$ é dito ser transcendente sobre $\mathbb{F}$ se t não é algébrico sobre $\mathbb{F}$, ou seja, se $\mathbb{F}[t] \cong \mathbb{F}[X]$.

Def.: Dizemos que $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é transcendente se $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ não é uma extensão algébrica.

Então $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é transcendente $\iff$ existe (pelo menos) um $t \in \mathbb{E}$ que é transcendente sobre $\mathbb{F}$.

Def. Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos e $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{E}$. Dizemos que $t_1, \ldots, t_m$ são algebricamente dependentes sobre $\mathbb{F}$ se existe $0 \neq f \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_m]$ tal que $f(t_1, \ldots, t_m) = 0$.
Se $t_1, \ldots, t_m$ não forem algebricamente dependentes, então denominamos de algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$.

Equivalentemente, $t_1, \ldots, t_m$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{F}$ se $\mathbb{F}[t_1, \ldots, t_m] \cong \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_m]$.
Temos também outra caracterização: defina o homomorfismo de anéis

$$\Psi_{(t_1, \ldots, t_m)} : \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_m] \longrightarrow \mathbb{E}$$

via $\Psi_{(t_1, \ldots, t_m)}(f(X_1, \ldots, X_m)) = f(t_1, \ldots, t_m)$. Então $t_1, \ldots, t_m$ são algebricamente independentes se e só se $\operatorname{Ker} \Psi_{(t_1, \ldots, t_m)} = 0$.

Def.: Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ e $M \subseteq \mathbb{E}$. Dizemos que M é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$ se para qualquer $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq M$, os elementos $t_1, \ldots, t_n$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{F}$.

Lema. Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, $M, N \subseteq \mathbb{E}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $M \cap N = \emptyset$ e $M \cup N$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$,

(ii) M é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}$, e N é algebricamente independente sobre $\mathbb{F}(M)$.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sendo $M \cup N$ alg. ind. sobre $\mathbb{F}$, e $M \subseteq M \cup N$, temos que M é alg. ind. sobre $\mathbb{F}$. Assuma que N não é algebricamente ind. sobre $\mathbb{F}(M)$. Daí, existem $t_1, \dots, t_n \in N$ e $0 \neq f \in \mathbb{F}(M)[X_1, \dots, X_n]$ tais que $f(t_1, \dots, t_n) = 0$.

Escreva
$$f = \sum_{I=(i_1,\dots,i_n)} \frac{\alpha_I}{\beta_I} X^{i_1} \cdots X^{i_n}, \quad \text{com } \alpha_I, \beta_I \in \mathbb{F}[M],$$
em que somente um número finito de parcelas do somatório é $\neq 0$.

Multiplicando f pelos β_I, podemos assumir que
$$f \in \mathbb{F}[M][X_1, \dots, X_n].$$
Sejam $s_1, \dots, s_m \in M$ todos os elementos que efetivamente aparecem nos coeficientes de f. Então, $f \in \mathbb{F}[s_1, \dots, s_m][X_1, \dots, X_n]$.

Portanto, existe $g \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_{n+m}]$ tal que
$$f(X_1, \dots, X_n) = g(s_1, \dots, s_m, X_1, \dots, X_n).$$
Assim, $g(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n) = 0$, e portanto, $\{s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n\} \subseteq M \cup N$ é alg. dependente sobre $\mathbb{F}$, uma contradição.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Temos que $M \cap N \subseteq \mathbb{F}(M) \cap N = \emptyset$. Assuma que $M \cup N$ é alg. dependente sobre $\mathbb{F}$. Então, existem $s_1, \dots, s_m \in M$, $t_1, \dots, t_n \in N$ e $0 \neq f \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_{n+m}]$ tais que $f(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n) = 0$. Temos que $n > 0$, pois M é alg. ind. sobre $\mathbb{F}$. Defina $g \in \mathbb{F}(M)[X_1, \dots, X_n]$ via

$$g(X_1, \dots, X_n) = f(s_1, \dots, s_m, X_1, \dots, X_n) \neq 0.$$

Além disso, $g(t_1, \dots, t_n) = 0$, ou seja, $\{t_1, \dots, t_n\}$ é alg. dep. sobre $\mathbb{F}(M)$, uma contradição. $\square$

Corolário. Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, $M \subseteq \mathbb{E}$ alg. ind./$\mathbb{F}$, $t \in \mathbb{E}, t \notin M$. Então $M \cup \{t\}$ é alg. ind. sobre $\mathbb{F} \Leftrightarrow t$ é transcendente sobre $\mathbb{F}(M)$.

Dem.: Basta tomar $N = \{t\}$ no lema anterior. $\square$

Def.: Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ uma extensão de corpos. Uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ é um conjunto algebricamente independente $M \subseteq \mathbb{E}$ tal que $\mathbb{E}/\mathbb{F}(M)$ é algébrica.

Obs.: (i) Considere a família dos subconjuntos de $\mathbb{E}$ que são alg. ind./$\mathbb{F}$, ordenado via inclusão. Então um subconjunto é maximal se e só se é base de transcendência.

(ii) Se M é base de transcendência, $[\mathbb{E} : \mathbb{F}(M)]$ não é um invariante.

Ex.: $\mathbb{E} = \mathbb{F}(t)$, $M_1 = \{t\}$, $M_2 = \{t^2\}$ são bases de trans., mas

$[\mathbb{E} : \mathbb{F}(M_1)] = 1 \neq 2 = [\mathbb{E} : \mathbb{F}(M_2)]$.

Lema. Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ ext. de corpos, $M_0 \subseteq \mathbb{E}$ alg. ind. sobre $\mathbb{F}$, e $S \subseteq \mathbb{E}$ tal que $\mathbb{E}/\mathbb{F}(S)$ é algébrica. Então, existe $S' \subseteq S$ tal que $S' \cap M_0 = \emptyset$ e $S' \cup M_0$ é uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$.

Dem.: Considere a seguinte família

$$\mathcal{M} = \{S_0 \subseteq S \mid S_0 \cap M_0 = \emptyset,\ S_0 \cup M_0 \text{ é alg. ind.} / \mathbb{F}\},$$

ordenada via inclusão. O conjunto $\mathcal{M}$ é não vazio, pois $\emptyset \in \mathcal{M}$. Do Lema de Zorn, existe $S' \in \mathcal{M}$ maximal (exercício: escreva os detalhes). Daí $S' \cap M_0 = \emptyset$ e $S' \cup M_0$ é alg. ind. sobre $\mathbb{F}$. Se $\mathbb{E}/\mathbb{F}(S' \cup M_0)$ não é alg., então existe $t \in \mathbb{E}$ que é trans. sobre $\mathbb{F}(S' \cup M_0)$. Do corolário anterior, segue que $M_0 \cup (S' \cup \{t\})$ é alg. ind. sobre $\mathbb{F}$, contradizendo a maximalidade de S'. Assim, $S' \cup M_0$ é base de transcendência. $\square$

Corolário. Se $M_0 \subseteq \mathbb{E}$ é alg. ind. sobre $\mathbb{F}$, então existe uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ contendo M_0. $\square$

Lema. Sejam M uma base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, e $N \subseteq M$. Então $M \setminus N$ é base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}(N)$.

Dem.: Exercício.

Teorema. Seja $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ ext. de corpos admitindo uma base de transcendência com $m<\infty$ elementos. Então toda base de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ possui m elementos.

Dem.: Sejam M, S bases de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$, e assuma que $|M|=m$. Então, basta mostrar que $|S|\leq m$. Provemos por indução em m. O caso base, $m=0$ é direto.

Seja $s\in S$. Então, existe $M_0\subseteq M$ tal que $\{s\}\cap M_0=\emptyset$ e $\{s\}\cup M_0$ é alg. ind. $/\mathbb{F}$. Como s é alg. sobre $\mathbb{F}(M)$, segue que $M_0\neq M$. Daí $|M_0|\leq |M|-1$. Do lema anterior, $(S\setminus\{s\})$ e M_0 são bases de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}(s)$. Por indução,

$$|S|-1=|S\setminus\{s\}|\leq |M_0|\leq |M|-1.$$

Daí $|S|\leq |M|$. $\square$

Def. Sejam $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ extensão de corpos e M uma base de transcendência. Definimos o grau de transcendência de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ por

$$\mathrm{gr.tr}(\mathbb{E}/\mathbb{F})=\begin{cases}\infty, & \text{se } M \text{ é infinito,}\\ m, & \text{se } M \text{ possui } m \text{ elementos.}\end{cases}$$

Teorema. Sejam $\mathbb{L}/\mathbb{E}/\mathbb{F}$. Então

$$\operatorname{gr tr}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) = \operatorname{gr.tr}(\mathbb{L}/\mathbb{E}) + \operatorname{gr.tr}(\mathbb{E}/\mathbb{F}).$$

Dem.: Sejam M e N bases de transcendências de $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ e $\mathbb{L}/\mathbb{E}$, respectivamente. Então, vale que:

(i) $M \cap N = \emptyset$,

(ii) $M \cup N$ é base de transcendência de $\mathbb{L}/\mathbb{F}$.

Detalhes ficam de exercício. $\square$