Le problème des rotations de Mazur: groupes d'isométries et transitivité dans les espaces de Banach,
avec C. Rosendal
Partie 3

Valentin Ferenczi,
Université de São Paulo - UPMC

Mini-cours du GDR, Mai 2016

Problème de Mazur, version isométrique

Problème (Rotations de Mazur, version isométrique)

Si $\|.\|$ est une norme équivalente sur H, transitive, doit-elle être hilbertienne?

Bien sûr, si $G = \mathrm{Isom}\,(H, \|.\|)$ est un groupe d'unitaires relativement à une norme équivalente hilbertienne $\|.\|'$ sur H, alors par transitivité $\|.\|'$ sera un multiple de $\|.\|$ et donc $\|.\|$ sera hilbertienne.

Donc le problème de Mazur isométrique est lié à la question de savoir quelles représentations bornées sur H sont unitarisables, i.e. unitaires pour une certaine norme hilbertienne équivalente.

Fixons quelques définitions.

Représentations bornées de groupes

Une représentation de groupes $\pi : \Gamma \to GL(H)$ est dite bornée si $\pi(\Gamma)$ est borné. On sait que π est alors une représentation isométrique pour une norme équivalente sur H, par exemple $|||x||| = \sup_{g \in G} \|gx\|_2$ - ici "isométrique" veut dire que $\pi(\gamma)$ est une isométrie pour tout γ.

SI $X = H$ Hilbert, cette norme n'est pas a priori hilbertienne, donc on définit aussi:

Définition

Une représentation $\pi : \Gamma \to GL(H)$ est

- *unitaire, si $\pi(\gamma)$ est une isométrie (i.e. un unitaire), $\forall \gamma \in \Gamma$.*
- *unitarisable s'il existe une norm équivalente hilbertienne sur H pour laquelle π est unitaire.*

Day-Dixmier

Théorème (Day-Dixmier, 1950)

Toute représentation bornée $\pi : \Gamma \to GL(H)$ d'un groupe (dénombrable) discret moyennable Γ est unitarisable.

Définition

Un groupe (dénombrable) discret G est moyennable s'il admet une mesure de probabilité μ finiment additive invariante à gauche, $\mu(gA) = \mu(A)$ si $g \in G$ et $A \subset G$.

Démonstration: Soit $\|.\|$ une norme équivalente $\pi(\Gamma)$-invariante (i.e. $\pi(\gamma) \in \mathrm{Isom}(H, \|.\|)$ pour tout γ). Soit $< ., . >$ un produit interne tel que $\|x_0\| = \sqrt{< x_0, x_0 >}$ pour x_0 fixé. On définit

$$[x, y] = \int_{\gamma \in \Gamma} < \pi(\gamma)x, \pi(\gamma)y > d\mu,$$

C'est un produit scalaire pour lequel $\pi(\gamma)$ est unitaire pour tout γ, et $\|x\|' = \sqrt{[x, x]}$ est équivalente à $\|x\|$.

Problème de Dixmier

On va voir que Ehrenpreis et Mautner (1955) montrent que cela ne s'étend pas aux groupes non-moyennables.

Question (Problème d'unitarisabilité de Dixmier)

Soit G un groupe dénombrable discret dont toutes les représentations bornées sur H sont unitarisables. G doit-il être moyennable?

On va maintenant étudier certaines représentations bornées "triangulaires" non-unitarisables (de groupes non moyennables) définies à partir de "dérivations".

Dérivations

Définition

Soit Γ *un groupe et* $\lambda : \Gamma \to \mathrm{GL}(H)$ *une représentation unitaire. On appelle dérivation de* λ *une application bornée de* Γ *dans* $\mathcal{L}(H)$ *telle que*

$$d(\gamma\gamma') = d(\gamma)\lambda(\gamma') + \lambda(\gamma)d(\gamma'),$$

ce qui signifie que

$$\lambda_d(\gamma) := \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & d(\gamma) \\ 0 & \lambda(\gamma) \end{pmatrix}$$

définit une représentation $\lambda_d : \Gamma \to GL(\mathcal{H}) = GL(H_1 \oplus H_2)$.

Dérivations internes

On a l'équivalence classique:

Proposition

Sont équivalents, pour d dérivation de $\lambda : \Gamma \to GL(H)$:

1. λ_d *est unitarisable*
2. d *est "interne": il existe* $A \in \mathcal{L}(H) : d(\gamma) = -A\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)A$
3. *il existe une projection linéaire continue p de $H_1 \oplus H_2$ sur H_1, qui est $\lambda_d(\Gamma)$-invariante ($p(\lambda_d(\gamma)) = \lambda_d(\gamma)p$ pour tout γ).*

Démonstration: $(1) \Rightarrow (3)$

Dérivations internes

On a l'équivalence classique:

Proposition

Sont équivalents, pour d dérivation de $\lambda : \Gamma \to GL(H)$:

1. λ_d *est unitarisable*
2. d *est "interne": il existe* $A \in \mathcal{L}(H) : d(\gamma) = -A\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)A$
3. *il existe une projection linéaire continue p de $H_1 \oplus H_2$ sur H_1, qui est $\lambda_d(\Gamma)$-invariante ($p(\lambda_d(\gamma)) = \lambda_d(\gamma)p$ pour tout γ).*

Démonstration: (1) $\Rightarrow$ (3) On utilise la projection associée à $H_1 \oplus H_1^\perp$ où l'orthogonal est pris au sens de la norme hilbertienne pour laquelle λ_d est unitaire. Comme H_1 est $\lambda(\Gamma)$-invariant, $H_1^\perp$ est invariant par tout $\lambda(\gamma)^* = \lambda(\gamma)^{-1} = \lambda(\gamma^{-1})$, donc $\lambda(\Gamma)$-invariant.

Dérivations internes

On a l'équivalence classique:

Proposition

Sont équivalents, pour d dérivation de $\lambda : \Gamma \to GL(H)$:

1. λ_d *est unitarisable*
2. d *est "interne": il existe* $A \in \mathcal{L}(H) : d(\gamma) = -A\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)A$
3. *il existe une projection linéaire continue* p *de* $H_1 \oplus H_2$ *sur* H_1, *qui est* $\lambda_d(\Gamma)$*-invariante* $(p(\lambda_d(\gamma)) = \lambda_d(\gamma)p$ *pour tout* γ).

Démonstration: (2) $\Rightarrow$ (1)

Dérivations internes

On a l'équivalence classique:

Proposition

Sont équivalents, pour d dérivation de $\lambda : \Gamma \to GL(H)$:

1. λ_d *est unitarisable*
2. d *est "interne": il existe* $A \in \mathcal{L}(H) : d(\gamma) = -A\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)A$
3. *il existe une projection linéaire continue* p *de* $H_1 \oplus H_2$ *sur* H_1, *qui est* $\lambda_d(\Gamma)$*-invariante* ($p(\lambda_d(\gamma)) = \lambda_d(\gamma)p$ *pour tout* γ).

Démonstration: (2) $\Rightarrow$ (1) pour $< x, y >' = < \mathcal{A}x, \mathcal{A}y >$, si

$$\lambda_d(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & -A\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)A \\ 0 & \lambda(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Id & -A \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & 0 \\ 0 & \lambda(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & A \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & 0 \\ 0 & \lambda(\gamma) \end{pmatrix} \mathcal{A}$$

Dérivations internes

On a l'équivalence classique:

Proposition

Sont équivalents, pour d dérivation de $\lambda : \Gamma \to GL(H)$:

1. λ_d *est unitarisable*
2. d *est "interne": il existe* $A \in \mathcal{L}(H) : d(\gamma) = -A\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)A$
3. *il existe une projection linéaire continue* p *de* $H_1 \oplus H_2$ *sur* H_1, *qui est* $\lambda_d(\Gamma)$*-invariante* ($p(\lambda_d(\gamma)) = \lambda_d(\gamma)p$ *pour tout* γ).

Démonstration: $(3) \Rightarrow (2)$

Dérivations internes

On a l'équivalence classique:

Proposition

Sont équivalents, pour d dérivation de $\lambda : \Gamma \to GL(H)$:

1. λ_d *est unitarisable*
2. d *est "interne": il existe* $A \in \mathcal{L}(H) : d(\gamma) = -A\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)A$
3. *il existe une projection linéaire continue* p *de* $H_1 \oplus H_2$ *sur* H_1, *qui est* $\lambda_d(\Gamma)$*-invariante* ($p(\lambda_d(\gamma)) = \lambda_d(\gamma)p$ *pour tout* γ).

Démonstration: (3) $\Rightarrow$ (2) On écrit $p = \begin{pmatrix} Id & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} Id & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & d(\gamma) \\ 0 & \lambda(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & d(\gamma) \\ 0 & \lambda(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CAFÉ ?

Exemple: torsion par un opérateur linéaire non borné

Théorème (Ehrenpreis-Mautner, 1955)

Le groupe libre F_∞ admet une représentation bornée non-unitarisable sur H.

(Mantero, Pytlik, Szwarc, Zappa,...) Soit λ la représentation unitaire de F_∞ sur $H = \ell_2(F_\infty)$ définie par

$$\lambda(\gamma)(\sum a_s 1_s) = \sum a_s 1_{\gamma s}.$$

Définition

Soit $L \colon \ell_1(F_\infty) \to \ell_1(F_\infty)$ le "Left Shift", i.e. l'opérateur défini par $L(1_e) = 0$ and $L(1_s) = 1_{\hat{s}}$ pour $s \neq e$, où $\hat{s}$ est le prédécesseur de s dans F_∞.

Donc L est un opérateur non-borné à domaine dense sur $H = \ell_2(F_\infty)$.

Exemple: torsion par un opérateur linéaire non borné

Définition

On définit

$$d_\infty(\gamma) = -L\lambda(\gamma) + \lambda(\gamma)L$$

sur $\ell_1(F_\infty) \oplus \ell_1(F_\infty)$. Vérifier que cela définit un opérateur borné sur $\mathcal{H} = \ell_2(F_\infty) \oplus \ell_2(F_\infty)$.

Notons que si L était borné, d_∞ serait interne.

Théorème

d_∞ est une dérivation bornée, non interne de λ. Par conséquent λ_{d_∞} est une représentation non unitarisable de F_∞.

On va maintenant donner une autre représentation de d_∞ à l'aide d'applications bornées, non-linéaires.

Torsion par une application uniformément continue

Proposition (F. - Rosendal 2015)

Si $\lambda_d : \Gamma \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ est une représentation d'un groupe Γ sur $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$ laissant H_1 invariant, i.e.

$$\lambda_d(\gamma) = \begin{pmatrix} u(\gamma) & d(\gamma) \\ 0 & v(\gamma) \end{pmatrix},$$

alors il existe $\psi : H_2 \to H_1$ homogène, uniformément continue sur la sphère, telle que $d(\gamma) = u(\gamma)\psi - \psi v(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, i.e.

$$\lambda_d(\gamma) := \begin{pmatrix} Id & -\psi \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\gamma) & 0 \\ 0 & v(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & \psi \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Ceci s'applique au cas de d_∞.

Démonstration

Exercice

Soit une famille de normes uniformément convexes $\|.\|_\alpha$, *qui sont*

- *uniformément équivalentes entre elles,*
- *telles que* $\delta_{\|.\|_\alpha}(\epsilon) \geq C\epsilon^p, \forall \alpha$.

Alors $|||x||| = \sup_\alpha \|x\|_\alpha$ *définit une norme uniformément convexe de type* p.

Exemple

Si G *est un sous-groupe borné de* $GL(H)$ *alors* $|||x||| = \sup_{g \in G} \|gx\|_2$ *est uniformément convexe de type* 2.

- Donc la norme $|||x||| = \sup_{\gamma \in \Gamma} \|\lambda_d(\gamma)x\|_2$ est une norme équivalente $\lambda_d(\Gamma)$-invariante sur $H_1 \oplus H_2$ qui est uniformément convexe (de type 2).

- Par résultats classiques, cela implique que l'application p de "nearest point in H", $p : H_1 \oplus H_2 \to H_1$, est uniformément continue sur la boule.
- Cette projection **non-linéaire** est invariante par translation de vecteur de H_1 donc admet la forme $p = \begin{pmatrix} Id & \psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et invariante par isométries, $p(\lambda_d(x)) = \lambda_d(p(x))$; on peut conclure comme dans le cas linéaire que $d(\gamma) = u(\gamma)\psi - \psi v(\gamma)$

Observation: notons que cette preuve vaut aussi avec $|||x||| = \sup_{g \in G} \|gx\|_2$, si G est un sous-groupe borné qui contient $\lambda_d(\Gamma)$.

On va maintenant passer de "unif. continue" à "Lipschitz".

Sous-groupes transitifs de $\mathrm{GL}(X)$

Définition

*Un sous-groupe borné G de $GL(X)$ est **transitif** s'il existe une norme équivalente $\|.\|$ sur X telle que*

1. *$\|.\|$ est G-invariante.*
2. *G agit transitivement sur $S_{X,\|.\|}$*

*Une définition similaire vaut pour **quasi-transitif**.*

On a vu dans le Cours 1 que Si G est quasi-transitif alors toutes les normes G-invariantes sont proportionnelles.

Sous-groupes transitifs de $\mathrm{GL}(X)$

Exemple (Deville-Godefroy-Zizler)

Soit X un espace superréflexif qui admet une norme $\|.\|_0$ de type p_0 et une norme $\|.\|_1$ telle que $\|.\|_1^*$ ait type p_1. Alors tout renormage quasi-transitif $\|.\|$ de X a type p_0 et $\|.\|^*$ a type p_1.

Démonstration: Soit $G = \mathrm{Isom}(X, \|.\|)$, qui est quasi-transitif.
Soit $|||x|||_0 = \sup_{g \in G} \|gx\|_0$, alors comme sup de normes de type p_0, elle est uniformément convexe de type p_0.
De même $|||\phi|||_1 = \sup_{g \in G} \|g^*\phi\|_1$ est uniformément convexe de type p_1. Comme $|||.|||_0$, $\|.\|$ et la norme préduale de $|||.|||_1$ sont G-invariantes, elles sont proportionnelles.

Torsion par une fonction Lipschitz

Proposition (F. - Rosendal 2015)

Soit $\lambda_d : \Gamma \to \mathrm{GL}(H_1 \oplus H_2)$ une représentation d'un groupe Γ sur $H_1 \oplus H_2$ laissant H_1 invariant, et telle que $\lambda_d(\Gamma)$ s'étende à un groupe quasi transitif G sur $H_1 \oplus H_2$. Alors $\exists \psi : H_2 \to H_1$ Lipschitz et homogène telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $d(\gamma) = u(\gamma)\psi - \psi v(\gamma)$, i.e.

$$\lambda_d(\gamma) := \begin{pmatrix} Id & -\psi \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\gamma) & 0 \\ 0 & v(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & \psi \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Démonstration: par DGZ, comme $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2$ et $\mathcal{H}^*$ ont type de convexité $=2$, toute norme G-invariante $\|.\|$ est telle que $\|.\|$ et $\|.\|^*$ aient types $p = q = 2$.
Par résultats classiques, le $\|.\|$-nearest point map a module de continuité uniforme $\omega(\epsilon)$ de l'ordre de $\epsilon^{p(1-1/q)} = \epsilon$, ce qui signifie que p associée et par conséquent ψ est Lipschitz.

Conclusion

Corollaire

Soit $\lambda_d : F_\infty \to \mathrm{GL}(H \oplus H)$ *la représentation non-unitarisable de* F_∞ *sur* $H \oplus H$ *définie antérieurement. Si* $\lambda_d(F_\infty)$ *s'étend à un sous-groupe quasi transitif* G *de* $\mathrm{GL}(H \oplus H)$*, il existe* $\psi : H \to H$ *Lipschitz, non-linéaire, telle que pour tout* $\gamma \in F_\infty$,

$$d_\infty(\gamma) = \lambda(\gamma)\psi - \psi\lambda(\gamma),$$

i.e.

$$\lambda_d(\gamma) := \begin{pmatrix} Id & \psi \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(\gamma) & 0 \\ 0 & \lambda(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & -\psi \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Question

- *Montrer qu'un tel* ψ *ne peut exister.*
- *Ou, montrer que* $\lambda_d(F_\infty)$ *s'étend à un groupe quasi transitif, et identifier la norme quasi transitive non hilbertienne associée.*

Conclusion

Question

Trouver un sous-groupe non-unitarisable, quasi transitif, de $\mathrm{GL}(H)$.

Question

Trouver un sous-groupe non-unitarisable, maximal borné, de $\mathrm{GL}(H)$.

R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 64. 1993.

V. Ferenczi and C. Rosendal, *Non-unitarisable representations and maximal symmetry*, Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, à paraître.

N. Ozawa, *An Invitation to the Similarity Problems (after Pisier)*, Surikaisekikenkyusho Kokyuroku, 1486 (2006), 27-40.

G. Pisier, *Are unitarizable groups amenable?*, Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects, 323362, Progr. Math., 248, Birkhauser, Basel, 2005.