Le problème des rotations de Mazur: groupes d'isométries et transitivité dans les espaces de Banach, avec C. Rosendal Partie 2

Valentin Ferenczi,
Université de São Paulo - UPMC

Mini-cours du GDR, Mai 2016

Le résultat principal

Définition

Une norme $\|.\|$ *est maximale si et seulement si* $\mathrm{Isom}(X, \|.\|)$ *est un sous-groupe borné* **maximal** *de* $GL(X)$

Théorème (F. - Rosendal, 2013)

Il existe un espace de Banach séparable uniformément convexe qui n'admet pas de norme maximale.

Espaces avec peu d'opérateurs

Définition

Un espace de Banach X est dit héréditairement indécomposable ou HI s'il ne contient pas de sous-espaces de dimension infinie en somme directe topologique.

C'est à dire, si $Y, Z \subseteq X$ sont de dimension infinie, alors

$$d(S_Y, S_Z) = 0.$$

Espaces avec peu d'opérateurs

Définition

Un espace de Banach X est dit héréditairement indécomposable ou HI s'il ne contient pas de sous-espaces de dimension infinie en somme directe topologique.

C'est à dire, si $Y, Z \subseteq X$ sont de dimension infinie, alors

$$d(S_Y, S_Z) = 0.$$

Le premier exemple d'espace HI fut construit par Gowers et Maurey (1992) pour résoudre le problème de la suite basique inconditionnelle.

Espaces avec peu d'opérateurs

Gowers et Maurey montrent que tout opérateur $T: X \to X$ sur un espace HI est de la forme

$$\lambda \mathrm{Id} + S,$$

Espaces avec peu d'opérateurs

Gowers et Maurey montrent que tout opérateur $T\colon X \to X$ sur un espace HI est de la forme

$$\lambda \mathrm{Id} + S,$$

où S est strictement singulier, i.e., $S_{|Y}$ n'est un isomorphisme pour aucun $Y \subseteq X$.

Espaces avec peu d'opérateurs

Gowers et Maurey montrent que tout opérateur $T\colon X \to X$ sur un espace HI est de la forme

$$\lambda \mathrm{Id} + S,$$

où S est strictement singulier, i.e., $S_{|Y}$ n'est un isomorphisme pour aucun $Y \subseteq X$.

Il s'ensuit que tout plongement isomorphe $T\colon X \to X$ de X dans X est surjectif, et donc X n'est pas isomorphe à ses sous-espaces propres (Problème de l'hyperplan.)

On peut donc se demander dans quel sens un espace HI a aussi peu d'isométries.

Espaces avec peu d'opérateurs

Notons que Jarosz (1988) a montré que **tout** espace de Banach X peut être renormé de telle manière que le groupe d'isométries agisse trivialement (toute isométrie est de la forme $\lambda \mathrm{Id}$).

Mais ici on cherche plutôt une condition pour que le groupe d'isométries soit "petit" pour n'importe quelle norme équivalente (autrement dit, que tout sous-groupe borné de $GL(X)$ soit "petit"). L'exemple de $X \simeq \ell_2^n \oplus Y$ nous mène à définir:

Définition

Un sous-groupe borné G de $GL(X)$ agit quasi-trivialement si il existe une décomposition $X = F \oplus H$ telle que:

- *pour tout $T \in G$, $T_{|H}$ est triviale ($= \lambda Id_H$)*
- $\dim F < +\infty$
- *F est G-invariant (i.e. $T(F) = F$ pour tout $T \in G$).*

Espaces avec peu d'opérateurs

En d'autres termes:

Définition

Un sous-groupe borné G de $GL(X)$ agit quasi-trivialement si il existe une décomposition G-invariante $X = F \oplus H$ telle que:

- *G agit trivialement sur H*
- $\dim F < +\infty$

Question

Existe-t'il un espace X tel que tout sous-groupe borné de $GL(X)$ agit quasi-trivialement?

Espaces avec peu d'opérateurs

Le cas des isométries sur les HI est encore plus restrictif que les opérateurs en général: F. Räbiger et W. J. Ricker (1998) ont montré que toute isométrie sur un HI est de la forme

$$\lambda \mathrm{Id} + K,$$

où K est compact.

Mais ceci peut être amélioré:

Proposition (F., Rosendal)

Toute isométrie de la forme $\lambda Id + S$ sur un espace de Banach X est de la forme $\lambda Id + K$, K limite d'opérateurs de rang fini.

Démonstration:

Espaces avec peu d'opérateurs

Théorème (F.Rosendal)

Toute isométrie de la forme $\lambda Id + S$ sur un espace de Banach X est de la forme $\lambda Id + K$, K limite d'opérateurs de rang fini.

Démonstration

On peut supposer $\lambda = 1$.
Si $\alpha \neq 1$ alors $T - \alpha Id = (1-\alpha)(Id + S/(1-\alpha))$ perturbation strictement singulière de $(1-\alpha)Id$ est un opérateur de "Fredholm". Par la théorie de Fredholm c'est donc une perturbation de rang fini d'un certain isomorphisme U.
Soit $A = \mathcal{L}(X)/\overline{\mathcal{F}(X)}$, et $q : \mathcal{L}(X) \to A$ l'application quotient. Alors $q(T - \alpha Id) = q(T) - \alpha q(Id)$ est inversible dans A. Donc le spectre de $q(T)$ est $\{1\}$. Ceci et $q(T)^n, n \in \mathbb{Z}$ borné impliquent par le théorème de Gelfand *dans l'algèbre de Banach A que $q(T) = q(1)$ donc $T = Id + K, K \in \overline{\mathcal{F}(X)}$.*

On peut en fait montrer:

Théorème (F., Rosendal)

Soit X un espace HI et $T : X \to X$ une isométrie. Alors

$$T = \lambda \mathrm{Id} + F,$$

où F est un opérateur de rang fini.
Si $\lambda = 1$ on a alors la décomposition

$$X = F_T \oplus H_T$$

où $H_T = \mathrm{Ker}(Id - T)$, et $F_T = \mathrm{Im}(Id - T)$ est de dimension finie.

Démonstration:

Démonstration: On peut supposer $\lambda = 1$. Par la théorie spectrale des opérateurs compacts

$$\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha_0 = 1\} \cup \{\alpha_n\}_{n \geq 1}$$

où $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est 1) une suite finie d'autovaleurs de multiplicité finie, ou 2) une suite infinie d'autovaleurs de multiplicité finie tendant à 1.

1) Dans le premier cas il existe une décomposition spectrale

$$X = X_1 \oplus (\oplus_n X_{\alpha_n})$$

où le spectre de $T_{|X_{\alpha_n}}$ est réduit à $\{\alpha_n\}$; le théorème de Gelfand implique que $T_{|X_{\alpha_n}} = \alpha_n Id_{X_{\alpha_n}}$ (car T agit comme isométrie sur X_{α_n}). Finalement on note que $\mathrm{Im}(T - Id) = F_T = \oplus_n X_{\alpha_n}$.

Démonstration: 2) Dans le second cas soit une suite de vecteurs propres v_n de valeurs propres $e^{i\theta_n}$ tendant à 1 suffisamment rapidement. En utilisant

$$\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j\| = \|T^k(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j)\| = \|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e^{ik\theta_j} v_j\|$$

o'u k est choisi pour que $e^{ik\theta_j} \simeq (-1)^j$ on obtient que $[v_{2n}]$ et $[v_{2n+1}]$ forment une somme directe, ce qui est impossible.

Groupe d'isométries sur un HI

Qu'en est-il maintenant de la structure globale d'un groupe d'isométries sur un espace HI? $\mathrm{Isom}(X)$ est fermé, mais en général il est facile qu'une suite d'opérateurs de rang fini converge à un opérateur compact, qui n'est pas de rang fini...

Quand X^* est séparable, les opérateurs de rang fini forment un sous-ensemble séparable de $\mathcal{L}(X), \|.\|$. Donc dans ce cas, $\mathrm{Isom}(X)$ est séparable et complet dans la topologie de la norme, i.e.

$$(\mathrm{Isom}(X), \|\cdot\|)$$

est un groupe polonais.
Donc puisque la topologie de la norme est plus fine que la topologie SOT, l'identité

$$\mathrm{id}\colon (\mathrm{Isom}(X), \|\cdot\|) \ \to \ (\mathrm{Isom}(X), \mathrm{sot})$$

est continue.

Donc par le théorème de l'application ouverte pour les groupes polonais, i.e le théorème de Pettis, ceci est un isomorphisme de groupes topologiques.

Corollaire

Si X est un espace HI à dual séparable, alors les topologies de la norme et SOT coincident sur $\mathrm{Isom}(X)$.

Cela veut dire que l'on a une très forte restriction sur $\mathrm{Isom}(X)$. En général, pour les opérateurs, SOT et la topologie de la norme ne coincident qu'en dimension finie. En fait:

Théorème (F. , Rosendal)

Soit X un espace HI réflexif et séparable, et G un groupe borné de $GL(X)$. Alors il existe une décomposition G-invariante $X = F \oplus H$ telle que

- $\dim F < +\infty$
- $G^+_{|H} := \{g_{|H} : g \in G, g - Id \text{ de rang fini}\}$ *est discret*

De plus si X n a pas de base de Schauder alors $G^+_{|H} = \{Id_H\}$, i.e. G agit trivialement sur H, et donc quasi trivialement sur X.

On sait qu'il existe un espace HI uniformément convexe (F., 1995). A partir des résultats de Szankowski sur la propriété d'approximation, il existe un sous-espace X_0 sans AP et donc sans base de Schauder, et toujours HI et **uniformément convexe**. Par conséquent

Proposition

Tout sous-groupe borné de $GL(X_0)$ agit quasi-trivialement.

Puis on observe:

Proposition

Si $\dim X = \infty$ *et tout sous-groupe borné de* $GL(X)$ *agit quasi-trivialement alors* X *n'admet pas de norme équivalente maximale.*

Démonstration:

Puis on observe:

Proposition

Si $\dim X = \infty$ *et tout sous-groupe borné de* $GL(X)$ *agit quasi-trivialement alors* X *n'admet pas de norme équivalente maximale.*

Démonstration

Soit $\|.\|$ *une norme sur* X, $G = \mathrm{Isom}(X)$, *et soit* $X = F \oplus H$ *la décomposition associée. On écrit* $H = \mathbb{C}e \oplus H'$ *et on définit pour* $x = f + \lambda e + h'$,

$$|||x||| = \|f\| + |\lambda| + \|h'\|$$

Alors $\mathrm{Isom}(X, \|.\|) \subset \mathrm{Isom}(X, |||.|||)$ *mais* $T(f + \lambda e + h') = (f - \lambda e + h')$ *définit un isomorphisme qui est une isométrie pour* $|||.|||$ *et pas pour* $\|.\|$. *Donc* $\|.\|$ *n'est pas maximale.*

On démontrera un cas particulier du théorème:

Théorème

Soit X un espace HI séparable, réflexif, qui n'admet pas de décomposition finie dimensionnelle. Alors toute sous-groupe borné de $GL(X)$ agit quasi-trivialement.

Pour cela il suffit de montrer le théoréme plus général suivant:

Théorème (F., Rosendal)

Soit X séparable, réflexif. Si T est une isométrie de X alors

$$X = H_T \oplus \overline{F_T}$$

où $H_T = \ker(Id - T), F_T = \mathrm{Im}(Id - T)$. Plus généralement si $T_1, \ldots, T_n$ sont des isométries de X, alors

$$X = \left(H_{T_1} \cap \ldots \cap H_{T_n}\right) \oplus \overline{F_{T_1} + \cdots + F_{T_n}}.$$

et si $T_1, T_2, \ldots$ est une suite infinie d'isométries, alors

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{T_n} \oplus \overline{\mathrm{span}}(\cup_n F_{T_n}).$$

Les constantes de projection sur le premier "summand" valent 1.

Démonstration du théorème antérieur: soit (T_n) dense dans $\mathrm{Isom}^+(X) := \{T \in \mathrm{Isom}(X) : T - Id \text{ a rang fini}\}$...

Pause?

Pause!

Plus généralement on va s'intéresser à des décompositions G-invariante qu'on notera

$$X = H_G \oplus H_{G^*}^{\perp},$$

où G est un sous-groupe borné de $GL(X)$.

Définition

Si G est un sous-groupe borné de $GL(X)$ on définit

- $H_G = \{x \in X \mid x \text{ est point fixe de } G\}$,
- $H_{G^*} = \{\phi \in X^* \mid \phi \text{ est point fixe de } G\}$,

Quand G est engendré par un unique élément, i.e., $G = \langle T \rangle$, il est clair que $H_{\langle T \rangle}$, $H_{\langle T \rangle^*}$ coincident avec $H_T = ker(Id - T)$, $H_{T^*} = ker(Id - T^*)$.

Notons également que si $G =< T_1, \ldots, T_n >$ alors

$$H_G = H_{T_1} \cap \ldots \cap H_{T_n}$$

et

$$H_{G*}^{\perp} = \overline{F_{T_1} + \cdots + F_{T_n}}.$$

De même si X est séparable et si T_n est une famille SOT-dense de G (qui existe puisque alors G est SOT-séparable), alors

$$H_G = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{T_n}$$

et

$$H_{G^*}^{\perp} = \overline{\mathrm{span}}(\cup_n F_{T_n}).$$

Décomposition de Alaoglu-Birkhoff

Voici un théorème ergodique de représentations de groupes.

Théorème (1ere version: Alaoglu-Birkhoff, 40)

Si X est réflexif (+ hypothèses) et G est un sous-groupe borné de $GL(X)$ alors on a la décomposition G-invariante

$$X = H_G \oplus \{x \in X \mid 0 \in \overline{\mathrm{conv}}(G \cdot x)\}.$$

Nous en montrons une autre version:

Décomposition de Alaoglu-Birkhoff

Théorème (F., Rosendal)

Soit X séparable réflexif et G sous-groupe borné de $GL(X)$. Alors X admet la décomposition G-invariante de type Alaoglu - Birkhoff:

$$X = H_G \oplus (H_{G^*})_\perp,$$

où, si $\mathcal{S} \subseteq G$ engendre un sous-groupe SOT-dense de G,

$$(H_{G^*})_\perp = \overline{\mathrm{span}}\Big(\bigcup_{T \in \mathcal{S}} F_T\Big) = \{x \in X \mid 0 \in \overline{\mathrm{conv}}(G \cdot x)\}.$$

La projection $P \colon X \to H_G$ est de norme inférieure ou égale à $\|G\|^2$, où $\|G\| := \sup_{g \in G} \|g\|$

Il nous reste donc à montrer ce théorème.

Renormages LUR et application duale

Le résultat sur la forme de chaque isométrie dans un HI utilisait la théorie spectrale. Pour les résultats sur les groupes d'isométries on utilise la théorie du renormage.

Rappelons qu'une norme sur X est uniformément convexe si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in S_X\ \big(\|x - y\| \geqslant \epsilon \Rightarrow \|x + y\| \leqslant 2 - \delta\big).$$

Une notion plus faible est celle de norme *localement uniformément convexe*, ou *LUR*:

$$\forall x_0 \in S_X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in S_X\ \big(\|x - x_0\| \geqslant \epsilon \Rightarrow \|x + x_0\| \leqslant 2 - \delta\big).$$

Renormages LUR et application duale

Théorème (Kadec 1961)

Tout espace séparable admet une norme équivalente LUR.

Cependant aucune relation n'est garantie entre les groupes d'isométries dans la norme initiale et la nouvelle norme. Toutefois, dans le cas réflexif:

Théorème (Lancien 1993)

Soit $(X, \|\cdot\|)$ séparable réflexif. Alors X admet une norme $(1+\epsilon)$-équivalente LUR $|||\cdot|||$, dont la norme duale est LUR, et telle que

$$\mathrm{Isom}(X, \|\cdot\|) \subseteq \mathrm{Isom}(X, |||\cdot|||).$$

Observation: aucun renormage LUR de L_1 ne peut préserver le groupe initial d'isométries.

Définition

Soit X Banach et $x \in S_X$. Une fonctionnelle support *pour x est une fonctionnelle $\phi \in S_{X^*}$ telle que $\phi(x) = 1$.*

La fonctionnelle support est unique quand, par exemple, la norme duale sur X^* est LUR (exercice).

Renormages LUR et application duale

Définition

Soit X Banach et $x \in S_X$. Une fonctionnelle support *pour x est une fonctionnelle $\phi \in S_{X^*}$ telle que $\phi(x) = 1$.*

La fonctionnelle support est unique quand, par exemple, la norme duale sur X^* est LUR (exercice).

Définition

Dans ce cas, pour $x \in S_X$, soit Jx la fonctionnelle support de x, on étend J à X par homogénéité, i.e.,

$$J(tx) = t \cdot Jx$$

si $t \geqslant 0$.

Propriétés élémentaires de l'application duale

Lemme

Soit X un espace réflexif tel que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^*$ soient LUR. Alors

1. $J \colon X \to X^*$ *est un homéomorphisme dont l'inverse est la fonction de dualité* J_* *de* X^* *dans* X.
2. *si* $T: X \to X$ *est une isométrie, alors*
$$JT^{-1} = T^* J.$$
3. *En particulier* $J(H_T) = H_{T^*}$ *et si* G *est un sous-groupe de* $\mathrm{Isom}(X)$ *alors* $J(H_G) = H_{G^*}$.

Démonstration: Soit $x_0 \in S_X$, $\epsilon > 0$, et $\delta = \delta(Jx_0, \epsilon)$. Si $\|Jx - Jx_0\| \geqslant \epsilon$ pour $x \in S_X$, alors $\|Jx + Jx_0\| \leqslant 2 - \delta$ et donc

$$\|x - x_0\| \geqslant (Jx)(x - x_0) = 2 - (Jx + Jx_0)(x_0) \geqslant 2 - \|Jx + Jx_0\| \geqslant \delta.$$

Donc J est continue de S_X dans S_{X^*} et donc de X dans X^*. Le reste est un exercice.

Propriétés élémentaires de l'application duale

Notons que si $\|.\|$ et $\|.\|^*$ sont uniforméments convexes alors S_X et S_{X*} seront uniformément homéomorphes.

Lemme

Soit X un espace réflexif tel que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^*$ soient LUR. Si $Y \subseteq X$ est un sous-espace tel que $J[Y] \subseteq X^*$ soit aussi un sous-espace, on a

$$X^* = J[Y] \oplus Y^\perp,$$

où $J[Y]$ est 1-complémenté.

Démonstration: soit $\psi \in X^*$.
Soit $\phi \in X^*$ une extension de Hahn–Banach de $\psi|_Y$ à X avec $\|\phi\| = \|\psi|_Y\|$. Alors $\psi|_Y = \phi|_Y$, donc $\psi - \phi \in Y^\perp$, et $\|\phi\| = \|\psi|_Y\| = \|\phi|_Y\|$. Donc par reflexivité $\phi|_Y$ et donc ϕ atteint sa norme sur Y, i.e. $\phi = Jy$ pour un $y \in Y$, i.e., $\phi \in J[Y]$. Donc $\psi = \phi + (\psi - \phi) \in J[Y] \oplus Y^\perp$.

Corollaire

Soit X un espace réflexif tel que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^*$ soient LUR. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(X)$. Alors $X = H_G \oplus H_{G^*}^{\perp}$, où H_G est 1-complémenté.

Rappelons le théorème à démontrer

Théorème (F., Rosendal)

Soit X séparable réflexif et G sous-groupe borné de $GL(X)$. Alors X admet la décomposition G-invariante de type Alaoglu - Birkhoff:

$$X = H_G \oplus (H_{G^*})_{\perp},$$

La projection $P\colon X \to H_G$ est de norme inférieure ou égale à $\|G\|^2$, où $\|G\| := \sup_{g\in G} \|g\|$

Théorème (F., Rosendal)

Soit X séparable réflexif et G sous-groupe borné de $GL(X)$. Alors X admet la décomposition G-invariante de type Alaoglu - Birkhoff:

$$X = H_G \oplus (H_{G^*})_\perp,$$

La projection $P\colon X \to H_G$ est de norme inférieure ou égale à $\|G\|^2$, où $\|G\| := \sup_{g\in G} \|g\|$

Démonstration: On peut définir $\|x\|_G = \sup_{g\in G} \|gx\|$, qui est $\|G\|$-équivalente à $\|x\|$, puis par Lancien $\|x\|'_G$ encore G-invariante et $\|G\| + \epsilon$-équivalente à $\|x\|$. La projection P a norme 1 relativement à $\|x\|'_G$.

Donc:

Théorème (V. Ferenczi, C.R.)

Soit X un espace séparable, réflexif, et soient $T_1, \dots, T_n$ des isométries sur X. Alors

$$X = \left(H_{T_1} \cap \dots \cap H_{T_n}\right) \oplus \overline{F_{T_1} + \cdots + F_{T_n}}.$$

avec constante uniforme. Si $T_1, T_2, \dots$ sont des isométries, alors

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{T_n} \oplus \overline{\cup_n F_{T_1} + \cdots + F_{T_n}}$$

Théorème

Soit X un espace HI séparable, réflexif, qui n'admet pas de Décomposition finie dimensionnelle. Alors toute norme équivalente sur X agit quasi-trivialement.

Quelques observations

- Si X est réflexif séparable et G sous-groupe borné de $GL(X)$ on définit aussi les sous-espaces

$$K_G = \{x \in X \mid \text{ l'orbite } G \cdot x \text{ est relativement compacte } \},$$

$$K_G^* = \{\phi \in X^* \mid \text{ l'orbite } G \cdot \phi \text{ est relativement compacte } \},$$

- Par les mêmes techniques (en particulier, $J(K_G) = K_G^*$ car $J(Tx) = T^{*-1}Jx$ et T est homeomorphisme aprés renormage LUR et LUR*), on obtient

$$X = K_G \oplus (K_{G^*})_\perp,$$

- Ceci s'identifie avec les décompositions de type Jacobs - de Leeuw - Glicksberg (1961), par

$$(K_G^*)_\perp = \{x \in X \mid x \ G\text{-furtif } \} = \{x \in X \mid \exists T_n \in G \ \ T_n x \underset{w}{\longrightarrow} 0\}.$$

Cette décomposition, et le fait que pour un espace HI réflexif, les topologies SOT et de la norme coincident sur $\mathrm{Isom}(X)$, sont le point de départ pour raffiner le théorème et obtenir le théorème cité antérieurement:

Théorème (F., Rosendal)

Soit X un espace HI réflexif et séparable, et G un groupe borné de $GL(X)$. Alors il existe une décomposition G-invariante $X = F \oplus H$ telle que

- $\dim F < +\infty$
- $G^+_{|H} = \{g_{|H}, g \in G, g - \mathrm{Id \ de \ rang \ fini}\}$ *est discret*

De plus se X n a pas de base de Schauder alors G agit trivialement sur H, et donc quasi trivialement sur X.

Propriétés des espaces $L_p = L_p(0,1)$

Quelques commentaires basés sur des résultats récents avec J. Lopez-Abad, B. Mbombo, S. Todorcevic.

Proposition

Si $1 \leq p < +\infty$ *et* $p \neq 4, 6, 8, \ldots$, *alors* $L_p(0,1)$ *est quasi-ultrahomogène: pour toute isométrie* t *entre* F *et* G, *où* F, G *sont sous-espaces de dimension finie de* L_p, *et tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $T \in \mathrm{Isom}(L_p)$ *telle que* $\|T_{|F} - t\| \leq \epsilon$.

- ceci étend la quasi-transitivité.
- Bien sûr si $p = 2$, c'est-à dire pour le Hilbert, on a même ultrahomogénéité.
- Si $p = 4, 6, 8, \ldots$ on peut montrer que L_p n'est pas quasi-ultrahomogène (B. Randrianantoanina); mais il a une forme restreinte de quasi-ultrahomogénéité (i.e. restreinte aux sous-espaces F, G isométriques à un ℓ_p^n).

Quasi-ultrahomogénéité

- Cette propriete et une certaine propriété de Ramsey pour les coloriages des plongements des ℓ_p^n dans les ℓ_p^m implique que $Isom(L_p), SOT$ est "extrêmement moyennable" déjà obtenu par Giordano-Pestov (2003) par concentration de la mesure.

En relation avec le problème de Mazur:

Question

L'espace de Hilbert est-il l'unique espace séparable ultrahomogène (i.e. tel que toute isométrie entre sous-espaces de dimension finie s'étende à une isométrie globale)?

Question

Montrer que $L_p(0,1)$ n'admet pas de renormage ultrahomogène.

- R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 64. 1993.
- V. Ferenczi and C. Rosendal, *On isometry groups and maximal symmetry*, Duke Mathematical Journal 162 (2013), 1771–1831.
- W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 851–874.
- A.S.Kechris, V.G. Pestov, and S.Todorcevic, *Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups*, Geom. Funct. Anal. 15 (2005), no. 1, 106189.
- U. Krengel, *Ergodic theorems*, de Gruyter Studies in Mathematics **6**, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1985.