Le problème des rotations de Mazur: groupes d'isométries et transitivité dans les espaces de Banach, avec C. Rosendal Partie 1

Valentin Ferenczi,
Université de São Paulo - UPMC

Mini-cours du GDR, Mai 2016

Notations

X=espace de Banach supposé, par défaut, séparable, de dimension infinie et complexe

H=l'espace de Hilbert

S_X=sphère unité de X, B_X=boule unité de X

$\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus sur X

$GL(X)$ est le groupe des automorphismes de X

Groupes topologiques

Quelques notions de théorie descriptive des ensembles:

Définition

Un groupe topologique G est un groupe muni d'une topologie telle que

- $(g, h) \mapsto g.h$ *soit continu de* $G \times G$ *dans* G
- $g \mapsto g^{-1}$ *soit continu de* G *dans* G

Exemple

- *Tout groupe G est topologique muni de la topologie discrète.*
- *Tout sous-groupe H d'un groupe topologique G est topologique muni de la topologie induite.*

Topologies sur $GL(X)$

On s'intéressera à deux topologies sur $GL(X)$:

- la topologie de la norme, induite par $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\|$.
- la topologie SOT (strong operator topology) donnée para la convergence ponctuelle sur X, i.e.,

$$T_\alpha \to T \Leftrightarrow T_\alpha(x) \to T(x), \forall x \in X.$$

Notons que si $|||.|||$ est une norme équivalente sur X, i.e. s'il existe $C \geq 1$: $\forall x \in X, C^{-1}|||x||| \leq \|x\| \leq C|||x|||$. alors $GL(X, \|\cdot\|) = GL(X, |||\cdot|||)$ et les deux topologies restent identiques.

Exercice

$GL(X), \|.\|$ est un groupe topologique.

Suggestion: si T_n tend vers T alors $\|T_n^{-1}\|$ tend vers 1 et $T_n^{-1} - T^{-1} = T_n^{-1}(T - T_n)T^{-1}$

Du fait que le produit n'est pas forcément continu sur $GL(X)$ pour SOT ($GL(X)$ n'est pas métrisable en général), on s'intéresse aux sous-groupes bornés G de $GL(X)$ (i.e. $\sup_{g \in G} \|g\| < +\infty$).

Exercice

Montrer que si G est un sous-groupe borné de $GL(X)$ alors G est un groupe topologique pour $\|.\|$ et SOT.

Suggestion: $T_\alpha^{-1}x - T^{-1}x = T_\alpha^{-1}(T - T_\alpha)(T^{-1}x)$

Le groupe $\mathrm{Isom}(X)$

Définition

On notera $\mathrm{Isom}(X)$ *le groupe des isométries (i.e. isométries linéaires surjectives) de* X*.*

$$T \in \mathrm{Isom}(X) \Leftrightarrow \|Tx\| = \|x\| \forall x \in X$$

Comme sous-groupe borné de $GL(X)$, $\mathrm{Isom}(X)$ est un groupe topologique pour $\|.\|$ et pour SOT.

Exercice

Vérifier que $\mathrm{Isom}(X), \|.\|$ *est complet.*

Suggestion: $T = T_n(Id + T_n^{-1}(T - T_n))$

Le groupe $\mathrm{Isom}(X)$

$\mathrm{Isom}(X), \|.\|$ n'est pas en général séparable. Par exemple si $X = \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$, et $\alpha = (\alpha_n)_n \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$T_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = (\alpha_1\lambda_1, \alpha_2\lambda_2, \ldots)$$

définit une famille non-dénombrable d'isométries telle que $\|T_\alpha - T_\beta\| = 2$ si $\alpha \neq \beta$.

Fait

Si X est séparable alors $(\mathrm{Isom}(X), SOT)$ est séparable.

En effet, si D est une famille dénombrable dense de X, $(\mathrm{Isom}(X), SOT)$ est homéomorphe (par $T \mapsto T_{|D}$) à $(\mathrm{isom}(D,X), SOT) \subset X^D$, où $\mathrm{isom}(D,X)$ est l'espace des injections isométriques linéaires à image dense de D dans X.

Groupes polonais

Définition

- *Un espace topologique est polonais s'il est séparable, métrisable complet.*
- *Un groupe polonais est un groupe topologique dont la topologie est polonaise.*

Exemple

$(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe polonais,* $(]0, +\infty[, .)$ *aussi (via exp).*

$\mathrm{Isom}(X)$ comme groupe polonais

Fait

Si X est séparable, alors $\mathrm{Isom}(X), SOT$ est un groupe polonais.

Démonstration: On sait que c'est un groupe topologique séparable homeomorphe à $\mathrm{isom}(D, X)(\subset X^D)$ qui est métrisable par

$$d(T, U) = \sum_n \min\{2^{-n}, d(Td_n, Ud_n)\}$$

Cette distance n'est pas a priori complète (une suite d'isométries peut tendre ponctuellement à une injection isométrique **non surjective**). On note que $d(T^{-1}, U^{-1})$ est une distance compatible (car $T \mapsto T^{-1}$ est continue) et que

$$D(T, U) = d(T, U) + d(T^{-1}, U^{-1})$$

est une distance compatible complète (on montre que si $T_n \to^{SOT} T$ et $T_n^{-1} \to^{SOT} U$ dans $B_{\mathcal{L}(X)}$ alors T est isométrie surjective - et $T^{-1} = U$).

Groupes d'isométries d'espaces classiques

1. Si H=Hilbert, le groupe $\mathrm{Isom}(H)$ est le groupe unitaire $\mathcal{U}(H)$. Notons que ce groupe agit transitivement sur S_H, i.e. quels que soient $x, y \in S_H$ il existe $T \in \mathrm{Isom}(H)$ tel que $Tx = y$.

2. Pour $1 \leq p < +\infty$, toute isométrie de $L_p = L_p(0,1)$ est de la forme
$$T(f)(.) = h(.)f(\phi(.)),$$
où ϕ est une transformation mesurable de $[0,1]$ sur lui-même, et h une fonction telle que $|h|^p = d(\lambda \circ \phi)/d\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue (Banach 1932).

   Notons que ce groupe agit quasi-transitivement sur S_{L_p}, i.e. $\forall x, y \in S_{L_p}, \forall \epsilon > 0, \exists T \in \mathrm{Isom}(L_p) : \|Tx - y\| \leq \epsilon$.

Démonstration

Soit $h > 0$ *telle que* $\|h\|_p = 1$*. Si on définit* $\phi(x) = \int_0^x h(t)^p dt$ *et*

$$T_h(f)(.) = h(.)f(\phi(.))$$

Alors T_h *est une isométrie qui envoie* 1 *sur* h*. Par changements de signes on voit que l'orbite de* 1

$$\mathrm{Orb}(1) := \{T(1) : T \in \mathrm{Isom}(L_p)\}$$

contient $S_1 := \{f \in S_{L_p} : f(t) \neq 0 \text{ p.p.}\}$*. Par ailleurs il est clair que* $\overline{S_1} = S_{L_p}$*. Donc l'action de* $\mathrm{Isom}(L_p)$ *sur la sphère est quasi-transitive.*

Par contre $\mathrm{Isom}(L_p)$ n'agit pas transitivement sur la sphère car (exercice) $\mathrm{Orb}(1) = S_1$.

Groupes d'isométries d'espaces classiques

3 Par le théorème de Banach-Stone (1932), toute isométrie de $C(K)$, K compact, est de la forme

$$T(f)(.) = h(.)f(\phi(.)),$$

où h est continue sur K à valeurs dans le cercle unité et ϕ un homéomorphisme de K.

4 Toute isométrie de c_0 et ℓ_p, $p \neq 2$, agit par permutations et changement de signe des coordonnées sur la base canonique $(e_n)_n$.

Il s'ensuit que $\mathrm{Isom}(\ell_p)$ (resp. $\mathrm{Isom}(c_0)$, resp. $\mathrm{Isom}(C(K))$) n'agit pas quasi-transitivement sur la sphère.

PAUSE ?

Le problème des rotations de Mazur

Réciproquement si $\mathrm{Isom(X)}$ agit transitivement sur la sphère de X, X doit-il être isomorphe? isométrique? à un espace de Hilbert?

(a) si $\dim X < +\infty$: OUI aux deux

(b) si $\dim X = +\infty$ et est séparable: ???

(c) si $\dim X = +\infty$ et n'est pas séparable: NON aux deux

Démonstration

(a) $\dim X < +\infty$. *Soit un produit scalaire* $< .,. >$ *tel que* $\|x_0\| = \sqrt{< x_0, x_0 >}$ *pour un certain* $x_0 \neq 0$. *On définit*

$$[x, y] = \int_{T \in \mathrm{Isom}(X, \|.\|)} < Tx, Ty > d\mu(T),$$

(mesure de Haar). C'est un nouveau produit scalaire pour lequel les T *sont encore des isométries, et* $\|x\| = \sqrt{[x, x]}$, *puisque vrai pour* x_0 *et par transitivité.*

Le problème des rotations de Mazur

Réciproquement si $\mathrm{Isom(X)}$ agit transitivement sur la sphère de X, X doit-il être isomorphe? isométrique? à un espace de Hilbert.

(a) si $\dim X < +\infty$: OUI aux deux

(b) si $\dim X = +\infty$ et est séparable: ???

(c) si $\dim X = +\infty$ et n'est pas séparable: NON aux deux

Démonstration

(c) On sait que l'orbite de tout vecteur de la sphère de Lp par l'action du groupe d'isométries est dense. On observe alors que toute ultrapuissance de L_p est un espace $\mathcal{L}_p$ non séparable sur lequel le groupe d'isométries agit transitivement.

On a donc le problème suivant qui apparaît dans le livre de Banach "Théorie des opérations linéaires", 1932.

Problème (de Mazur isomorphe)

Si $X, \|.\|$ est séparable et transitif, doit il être isomorphe à l'espace de Hilbert H?

Problème (de Mazur isométrique)

Si $\|.\|$ est une norme équivalente transitive sur H, doit-elle être une norme hilbertienne (i.e. induite par un produit scalaire)?

Voyons quelques notions reliées à ce problème.

Normes maximales

Définition

Une norme $\|\cdot\|$ *on* X *est maximale si pour toute norme équivalente* $|||\cdot|||$*,*

$$\mathrm{Isom}(X, \|\cdot\|) \subset \mathrm{Isom}(X, |||\cdot|||) \Rightarrow \mathrm{Isom}(X, \|\cdot\|) = \mathrm{Isom}(X, |||\cdot|||)$$

Exemple

Sont maximales les normes de:

- ℓ_p *(Rolewicz),*
- $C(K, \mathbb{C})$*,* K *variété compacte (Kalton-Wood),*

La norme usuelle de $C([0,1], \mathbb{R})$ ne l'est pas (Partington).

Voyons maintenant que la quasi-transitivité implique la maximalité.

On notera $\mathrm{Orb}(x)$ l'orbite du point x de X, sous l'action du groupe $\mathrm{Isom}(X, \|.\|)$, i.e.

$$\mathrm{Orb}(x) = \{Tx, T \in \mathrm{Isom}(X, \|.\|)\}.$$

Définition

Une norme $\|.\|$ sur X est dite

(i) *transitive si $\forall$ (ou $\exists$)$x \in S_X$, $\mathrm{Orb}(x) = S_X$.*

(ii) *quasi transitive si $\forall$ (ou $\exists$)$x \in S_X$, $\mathrm{Orb}(x)$ est dense dans S_X.*

(iii) *maximale s'il n'existe pas de norme équivalente $|||.|||$ sur X telle que $\mathrm{Isom}(X, \|.\|) \subsetneq \mathrm{Isom}(X, |||.|||)$ avec inclusion stricte.*

On a (i) $\Rightarrow$ (ii), et aussi (ii) $\Rightarrow$ (iii) (Rolewicz).

Démonstration: si $\mathrm{Isom}(X, \|.\|) \subseteq \mathrm{Isom}(X, |||.|||)$, soit $x_0 \in S_X$ et λ tel que $|||x_0||| = \lambda\|x_0\|$. On a donc $|||x||| = \lambda\|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{Orb}_{\|.\|}(x_0)$. Et donc pour tout x si $\|.\|$ est quasi-transitive.

Notons que l'on a en fait prouvé:

Proposition

Si G est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(X, \|.\|)$ qui agit (quasi)-transitivement sur $S_{X,\|.\|}$ alors toutes les normes équivalentes G-invariantes $|||.|||$ telles que $G \subseteq \mathrm{Isom}(X, |||.|||)$ sont proportionnelles.

Le problème de Wood

Etant donné un espace X et son groupe d'isométries, on peut être tenté d'éliminer les aspérités de la sphère unité pour la rendre plus "lisse" ou plus "convexe" (théorie du renormage), pour **augmenter** le groupe d'isométries et arriver à une norme équivalente maximale.

Par exemple, si X est de dimension finie, la formule

$$[x, y] = \int_{T \in \mathrm{Isom}(X, \|.\|)} < Tx, Ty > d\mu(T),$$

(mesure de Haar), définit un produit scalaire pour lequel les T sont encore des isométries, si bien que la norme

$$\| \cdot \|_{\langle \cdot | \cdot \rangle} = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$$

est une norme transitive et donc maximale sur X telle que

$$\mathrm{Isom}(X, \| \cdot \|) \subseteq \mathrm{Isom}(X, \| \cdot \|_{\langle \cdot | \cdot \rangle}).$$

On a donc les questions suivantes.

Question (Wood 1982)

Un espace X admet-il toujours une norme maximale?

Question (Wood 2006)

Un espace $X, \|.\|$ admet-il toujours une norme maximale $|||.|||$ telle que

$$\mathrm{Isom}(X, \|\cdot\|) \leqslant \mathrm{Isom}(X, |||\cdot|||)$$

Question (Deville - Godefroy - Zizler 1993)

Un espace superrefléxif (ou uniformément convexe) admet-il toujours une norme (quasi)-transitive?

On peut reformuler les questions de Wood en termes de sous-groupes bornés.

Sous-groupes bornés de $GL(X)$

Définition

Un sous-groupe G de $GL(X)$ est borné si $\sup_{g\in G}\|g\| < +\infty$.

Observons que ceci ne dépend pas du choix de norme équivalente sur X. C'est donc une notion topologique.
Par exemple, si $\|.\|$ est une norme équivalente sur X, alors $\mathrm{Isom}(X, \|.\|)$ est borné. Réciproquement:

Fait

Si $G \subseteq GL(X)$ est borné alors il existe $|||.|||$ norme équivalente sur X telle que $G \subseteq \mathrm{Isom}(X, |||.|||)$.

Démonstration: on définit $|||x||| = \sup_{g\in G}\|gx\|$.

Donc les sous-groupes bornés de $GL(X)$ sont les sous-groupes des groupes d'isométries de X pour les normes équivalentes.

On peut alors reformuler

Fait

Une norme $\|.\|$ est maximale si et seulement si $\mathrm{Isom}(X, \|.\|)$ est un sous-groupe borné **maximal** *de $GL(X)$*

Démonstration: tout sous-groupe borné G qui contient strictement $\mathrm{Isom}(X, \|.\|)$ est un groupe d'isométries pour $|||x||| = sup_{g \in G}\|gx\|$.

Les questions de Wood sont donc équivalentes à:

Question

$GL(X)$ contient-il toujours un sous-groupe borné maximal? Tout sous-groupe borné de $GL(X)$ est-il contenu dans un sous-groupe borné maximal?

On donnera une réponse négative aux questions de Wood et Deville-Godefroy-Zizler:

Theorème (Ferenczi - Rosendal, 2013)

Il existe un espace séparable uniformément convexe qui n'admet pas de norme équivalente maximale.

Theorème (Dilworth - Randrianantoanina, 2014)

Soit $1 < p < +\infty, p \neq 2$. *Alors*

- ℓ_p *n'admet pas de norme équivalente quasi-transitive.*
- *il existe un groupe borné d'isomorphismes sur* ℓ_p *qui n'est contenu dans aucun sous-groupe borné maximal.*

Rappelons que les normes $\ell_p, 1 < p < +\infty$ sont uniformément convexes et maximales.

Question

Soit $1 < p < +\infty, p \neq 2$. *L'espace* $L_p([0,1])$ *admet-il une norme transitive?*

Sur la question de Deville-Godefroy-Zizler

- Une norme sur X est uniformément convexe si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in S_X\ \left(\|x - y\| \geqslant \epsilon \Rightarrow \|x + y\| \leqslant 2 - \delta \right).$$

- On sait que pour H on peut choisir $\delta(\epsilon) \sim \epsilon^2$.
- Plus généralement on dit qu'une norme uniformément convexe a *type* $p \geq 2$ si $\delta(\epsilon) \sim \epsilon^p$.
- X superréflexif $\Leftrightarrow$ X a une norme équivalente uniformément convexe $\Leftrightarrow$ X^* a une norme équivalente uniformément convexe

La motivation de Deville-Godefroy-Zizler est la suivante:

Question

Soit X un espace superréflexif qui admet une norme $\|.\|_0$ de type p_0 et une norme $\|.\|_1$ telle que $\|.\|_1^*$ ait type p_1. Existe-t'il une norme $\|.\|$ sur X de type p_0 telle que $\|.\|^*$ ait type p_1 ?

Deville-Godefroy-Zizler observent que si X admet une norme équivalente quasi-transitive alors la réponse est positive. On verra plus tard pourquoi.

La question ci-dessus reste ouverte.

- F. Cabello-Sánchez, *Regards sur le problème des rotations de Mazur*, Extracta Math. 12 (1997), 97–116.
- V. Ferenczi and C. Rosendal, *On isometry groups and maximal symmetry*, Duke Mathematical Journal 162 (2013), 1771–1831.
- R. Fleming and J. Jamison, *Isometries on Banach spaces. Vol. 1. Function spaces*, Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.
- A. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- G. Wood, *Maximal symmetry in Banach spaces*, Proc. Roy. Irish Acad. **82** (1982), 177–186.